Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Колледж электроники и бизнеса

Предметно-цикловая комиссия физико-математических дисциплин

Т.В. Атяскина

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Часть II

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний к практическим работам для студентов, обучающихся по программе среднего профессионального образования по специальности 230115 Программирование в компьютерных системах

Оренбург
2014

УДК 510.6 (075.32)
ББК 22.12 Я723
А - 92

Рецензент доцент, кандидат физико-математических наук,
Т.М. Отрыванкина

Атяскина, Т.В.

А-92 Элементы математической логики: методические указания к практическим работам. В 2 ч. /Т.В.Атяскина, Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2014. Ч.2 – 27 с.

Методические указания предназначены для выполнения практических работ по дисциплине "Элементы математической логики" в колледже электроники и бизнеса ОГУ. Для студентов 2 курса специальности 230115 "Программирование в компьютерных системах" очной формы обучения.

Методические указания составлены с учетом Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов — утвержденного приказом № 696 от 23.06.2010 Министерством образования и науки Российской Федерации. В данных методических указаниях представлены практические работы по разделам «Множества», «Логика предикатов».

УДК 510.6 (075.32)
ББК 22.12 Я723

Содержание

1 Практическая работа № 8. Операции над множествами

Цель работы: Изучить понятие множества. Научиться выполнять операции над множествами.

1.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

1.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

1.3 Методические указания к практической работе № 8

1.3.1 Понятие множества

Множество – основное фундаментальное понятие в математике. Под множеством понимается совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, свойством.

Примеры:

1) множество студентов в данной аудитории;

2) множество действительных чисел;

3) множество корней квадратного уравнения x^2-4=0.

Множество обозначается большими латинскими буквами: А, В, С…

Считается, что множество состоит из элементов, которые обозначаются маленькими латинскими буквами: а, в, с,…

Обозначения:

{}- знак множества;

$a \in A$- элемент а принадлежит множеству А;

$a \notin A$- элемент а не принадлежит множеству А.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым**, и обозначается - Ø.

Множество В называется подмножеством множества А, если любой элемент множества В принадлежит и множеству А.($B \subseteq A$)

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество, содержащее все рассматриваемые в какой-либо задаче подмножества, называется универсальным, и в общем случае обозначается -U.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется конечным (счетным), в противном случае бесконечным. Количество элементов счетного множества называется мощностью и обозначается |А|.

Замечания:

1) во множестве элементы не повторяются;

2) элементы во множестве могут располагаться в любом порядке.

1.3.2 Операции над множествами

Пусть А, В, $C \in U$.

1. Пересечение множеств

Пересечением множеств А и В называют новое множество С, состоящие из тех и только тех элементов, которые одновременно входят в А и В.

Обозначают $A \cap B$, т.е. $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

Примеры:

1) Даны множества:

$A = \{x \mid x \in R \text{ и } 2 \le x \le 7\}$

$B = \{x \mid x \in R \text{ и } -1 \le x \le 5\}$

Найти $A \cap B$.

Решение: Изобразим множества А и В на числовой прямой (см. рисунок 1). Найдем пересечение этих множеств:

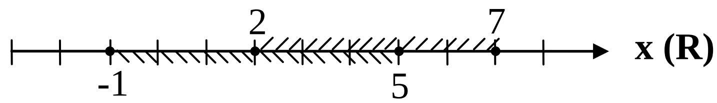

Рисунок 1-Пересечение множеств А и В

$C = A \cap B = \{x \mid x \in R \text{ и } 2 \le x \le 5\}$

2) Пусть А - множество треугольников на плоскости;

В - множество правильных многоугольников на плоскости.

Тогда $A \cap B$ - множество правильных треугольников на плоскости.

2. Объединение множеств

Объединением множеств А и В называют третье множество С, состоящие из таких элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств.

Обозначают $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$

Примеры:

1) Даны множества $A = \{2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$

Найти $A \cup B$, $A \cap B$

Решение: $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$; $A \cap B = \{3,4\}$

2) Даны множества $A = \{x \mid x \in R \text{ и } -2 \le x < 5\}$

$B = \{x \mid x \in R \text{ и } 1 < x < 8\}$

Найти $A \cup B$

Решение: Изобразим множества A и B на числовой прямой (смотри рисунок 2). Найдем их объединение:

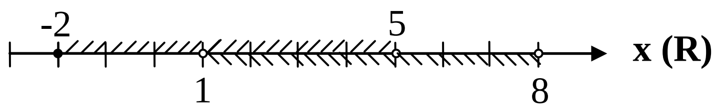

Рисунок 2-Объединение множеств A и B

$A \cup B = \{x \mid x \in R$ и $-2 \le x < 8\}$

3. Разность множеств

Под разностью двух множеств A и B понимают новое множество C элементов x таких, что x принадлежит A, но не принадлежит B.

Обозначают $C = A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$

Примеры:

1) даны множества $A = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$, $B = \{-1,0,2,3,10\}$

Найти $A \setminus B$

Решение: $A \setminus B = \{1,4,5\}$

2)даны множества

$A = \{x \mid x \in R$ и $2 \le x \le 7\}$

$B = \{x \mid x \in R$ и $-1 \le x \le 5\}$

Найти $A \setminus B$

Решение: Изобразим множества A и B на числовой прямой (смотри рисунок 3). Найдем их разность:

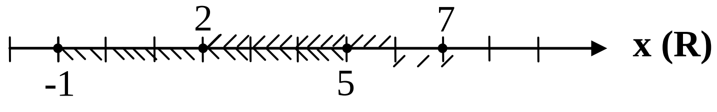

Рисунок 3-Разность множеств A и B

$A \setminus B = \{x \mid x \in R$ и $5 < x \le 7\}$

4. Дополнение множества

Дополнение к множеству A называют множество всех элементов из U, не принадлежащих A.

Обозначают $A' = \{x \mid x \in U$ и $x \notin A\}$

Примеры:

1) Пусть U- множество целых чисел;

A- множество четных чисел.

Тогда A′- множество нечетных чисел.

2) Пусть A=[1;6], U=R

Тогда $A' = (-\infty;1) U (6;+\infty)$

1.4 Варианты заданий

Задание № 1

Укажите множество чисел, соответствующие записи.

№ варианта		№ варианта	
1	$A=\{x \mid 3x - 2 \geq 0, x \in R\}$	9	$A=\{x \mid 3x-6 \leq 0, x \in N\}$
2	$D=\{x \mid x^2 + x + 1 > 0, x \in R\}$	10	$D=\{x \mid 3x-2 \geq 0, x \in R\}$
3	$B=\{x \mid -3 \leq x < 9, x \in Z\}$	11	$B=\{x \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0, x \in R\}\}$
4	$A=\{x \mid -3 \leq x < 0, x \in N\}$	12	$C=\{x \mid x^2 - x - 4 = 0\}$
5	$C=\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0, x \in R\}$	13	$A=\{x \mid 0 \leq x < 10, x \in Z\}$
6	$A=\{x \mid 5 \leq x \leq 6, x \in N\}$	14	$D=\{x \mid -1 \leq x \leq 10, x \in Z\}$
7	$A=\{x \mid 5 \leq x \leq 9, x \in N\}$	15	$B=\{x \mid x^2 - 4 = 0, x \in N\}$
8	$B=\{x \mid -3 \leq x < 9, x \in N\}$		

Задание № 2

Заданы множества: A= {1,5,7,9,12}, B={1,13,14}, C={5,7,9,11,13}.

Определите множество.

№ варианта		№ варианта	
1	$A \cup B \cup C$	9	$(A \setminus B) \setminus C$
2	$A \cap (B \cup C)$	10	$(A \cup B) \cap C$
3	$A \cap B \cap C$	11	$A \setminus (B \setminus C)$
4	$(A \cap B) \setminus C$	12	$(A \cap B) \cup C$
5	$A \cap (B \setminus C)$	13	$(B \setminus A) \setminus C$
6	$(A \cup B) \setminus C$	14	$(B \setminus A) \cap C$
7	$A \setminus (B \cap C)$	15	$(B \setminus A) \cup C$
8	$A \cup (B \setminus C)$		

Задание № 3

Заданы множества: а) A=[3,8]; B=(1,6]; C=(-7,4).

б) A=(5,6);B=[-1,10); C=[0,2]

Определите множества:

№ варианта		№ варианта	
1	$(A' \cup B) \cap C$	9	$(A \setminus B) \setminus C$
2	$A' \cap (B \cup C)$	10	$(A \cup B) \cap C$
3	$A \cap B \cap C$	11	$A \setminus (B \setminus C)$
4	$(A \cap B) \setminus C$	12	$(A \cap B) \cup C$
5	$A \cap (B \setminus C)$	13	$(B \setminus A) \setminus C'$
6	$(A \cup B) \setminus C$	14	$(B \setminus A) \cap C'$
7	$A \setminus (B \cap C)$	15	$(B \setminus A) \cup C$
8	$A \cup (B' \setminus C)$		

Задание № 4

Заданы множества A, B, C. Найти указанное множество.

№ варианта	
1	A={x|x∈R и x^2-15x+56<0} B={x|x∈R и -2<x<3} C={x|x∈R и 2x>1} Найти множество: $(A\cup B')\cap(A\cup C')$
2	A={x|x∈R и x^2-15x+56<0} B={x|x∈R и -2<x<3} C={x|x∈R и 2x>1} Найти множество: $(A\cap B')\cup(A\cap C')$
3	A={x|x∈R и x^2-7x+10>0} B={x|x∈R и -3<x<5} C={x|x∈R и 6x<30} Найти множество: $(A\setminus C)\cap(B'\cup C)$
4	A={x|x∈R и x^2-5x+6<0} B={x|x∈R и -2<x<5} C={x|x∈R и 2x>6} Найти множество: $(A'\cap B')\setminus(A\cap C')$
5	A={x|x∈R и x^2-5x+2<0} B={x|x∈R и -1<x<5} C={x|x∈R и 2x>6} Найти множество: $(A\cap B')\cup(A\setminus C')$
6	A={x|x∈R и x^2-5x+10<0} B={x|x∈R и -2<x<7}
9	A={x|x∈R и x^2-7x+10>0} B={x|x∈R и -3<x<54} C={x|x∈R и 6x<3} Найти множество: $(A\cup C)\cap(B'\cup C)$
10	A={x|x∈R и x^2-7x+10>0} B={x|x∈R и -3<x<54} C={x|x∈R и 6x<3} Найти множество: $(A\cap B)\setminus(B'\cup C)$
11	A={x|x∈R и x^2-5x+6<0} B={x|x∈R и -2<x<5} C={x|x∈R и 2x>6} Найти множество: $(A\cap B')\cup(A\cap C')$
12	A={x|x∈R и x^2 - x+10>0} B={x|x∈R и -1<x<5} C={x|x∈R и 6x<3} Найти множество: $(A\setminus C)\cap(B'\cup C)$
13	A={x|x∈R и x^2 - x+12>0} B={x|x∈R и -1<x<6} C={x|x∈R и x<3} Найти множество $(A\setminus C)\cap(B'\cup C)$
14	A={x|x∈R и x^2 - x+12≥0} B={x|x∈R и -1<x<6}

C={x|x∈R и 2x>3}

Найти множество:

$(A\setminus B')\cup(A\setminus C')$

7 A={x|x∈R и x^2-x+6<0}

B={x|x∈R и -2<x<9}

C={x|x∈R и x>6}

Найти множество:

$(A\cap B')\setminus(A\cap C')$

8 A={x|x∈R и x^2-5x+6≥0}

B={x|x∈R и -1<x<5}

C={x|x∈R и 2x>4}

Найти множество:

$(A\cap B')\cup(A\setminus C')$

C={x|x∈R и x<5}

Найти множество

$(A\setminus C)\cap(B'\cup C)$

15 A={x|x∈R и x^2 - x+12≤0}

B={x|x∈R и -1<x<7}

C={x|x∈R и x<5}

Найти множество

$(A\setminus C)\cap(B'\cup C)$

Задание № 5

Исходя из определений равенства множеств и операций над множествами, проверьте тождество и проиллюстрируйте решение с помощью кругов Эйлера-Венна.

№ варианта		№ варианта	
1	$A\cap(B\cup(A\cap C))=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	9	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
2	$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B$	10	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
3	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	11	$(C\setminus B)\setminus A=(C\setminus A)\setminus B$
4	$A\cap(B\cap C)=(A\cap C)\cap B$	12	$B\setminus C\cap A=A\setminus C\cap B$
5	$A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$	13	$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
6	$C\setminus B\cap A=A\setminus B\cap C$	14	$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
7	$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B$	15	$A\setminus B\cap C=C\setminus B\cap A$
8	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$		

1.5 Вопросы к защите практической работы № 8

1) Что такое множество? Как его обозначают? Приведите примеры.

2) Что такое подмножество? Приведите пример.

3) Какое множество называется счетным? Какое – пустым?

4) Способы задания множеств.

5) Какое множество можно назвать универсальным?

6) Поясните термин «мощность множества».

7) Что называется пересечением множеств?

8) Что называется объединением множеств?

9) Что понимается под разностью двух множеств?

10) Что называется дополнением множества?

2 Практическая работа № 9. Операции над предикатами

Цель работы: Изучить понятие предиката. Научиться выполнять операции над предикатами и находить множество истинности предикатов.

2.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

2.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

2.3 Методические указания к практической работе № 9

2.3.1 Понятие предиката

В математике постоянно используются высказывания, зависящие от одной или нескольких переменных.

Предложения, в которые входят переменные и которые при замене этих переменных их значения становится высказываниями, называются предикатами.

Если предложение зависит от одной переменной, то это одноместный предикат, от двух переменных, то это двухместный предикат и т.д.

Множество T значение переменных при подстановки, которых в предикат получается истинное высказывание, называется множеством истинности предиката.

Если предикат двухместный, трехместный и т.д., то для каждой переменной должно быть указано множество его значений.

Если в предикат входят переменные $x_1, x_2,..., x_n$ принадлежащий соответственно множеству $X_1, X_2,..., X_n$, то декартова произведение множеств $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ является областью определения этого предиката, а множество T картежей $(a_1, a_2,..., a_n)$ таких, что при замене x_1 на a_1, x_2 на a_2, … x_n на a_n, получается истинное высказывание - называют областью истинности предиката.

Обозначение предикатов:

A(x), где $x \in X$ –одноместный предикат;

B(x, y), где $x \in X$, $y \in У$ – двухместный предикат.

Пример: Даны предикаты, определить их множество истинности

1) 2x+5=3, x є N

$T=\{\varnothing\}$ –множество истинности предиката

2) 2x+5=3, x є R

$T=\{-1\}$

3) x<7, x є N

$T=\{1,2,3,4,5,6\}$.

4) «В многоугольнике x имеется y вершин» - двухместный предикат A(x,y), где $x \in X$, $y \in У$ (X – множество многоугольников, У=N - множество натуральных чисел (определяет число вершин))

Тогда (квадрат, 5)$\notin$T

(квадрат, 4)$\in$T

2.3.2 Операции над предикатами

Конъюнкцией двух предикатов F(x) и Q(x), имеющих общую область определения X, называют такой предикат F(x)ΛQ(x), x є X, что для любого aєX значение этого предиката является конъюнкцией высказываний F(a)ΛQ(a).

Множество истинности для предиката F(x)ΛQ(x***)*** служит пересечением множеств истинности F(x) и Q(x).

Примеры: Даны предикаты. Найти множество истинности конъюнкции предикатов.

1) F(x): ”$3 \le x$”, x є R

Q(x): “ $x \le 6$”, x є R

$T_{F(x) \wedge Q(x)}$: “$3 \le x \le 6$”

2) F(x)***:*** “$x^2+y^2=25$”

Q(x): “$x+y=7$”

$T_{F(x)\wedge Q(x)}$: $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$

Замечание: Всякая система уравнений есть конъюнкция этих уравнений.

Дизъюнкцией двух предикатов F(x) и Q(x) называется такой предикат F(x)VQ(x), что для всех a$\in$X, значение этого предиката является дизъюнкция высказываний F(a)VQ(a).

Множество истинности для предиката F(x)VQ(x) является объединение множеств истинности F(x) и Q(x).

Пример: Даны предикаты. Найти множество истинности дизъюнкции предикатов.

F(x): “$x<4$”, x є R

Q(x): “$x=4$”, x є R

$T_{F(x) \vee Q(x)}$: “$x\leq 4$”, $x\in R$

Импликацией двух предикатов F(x) и Q(x), определенных на одном и том же множестве X, называют предикат F(x) → Q(x), который при любом a є X, имеет значение F(a) → Q(a).

Примеры: Даны предикаты. Составить импликацию предикатов и выяснить их истинность.

1) F(x): “$2x=6$”

Q(x): “$x^2=9$”

F(x) → Q(x): “Если $2x=6$, то $x^2=9$” – И

2) F (x): “Последняя цифра числа x равна 0”

Q(x): ”Натуральное число x делится на 5”

F(x) → Q(x): “Если последняя цифра числа x равна 0, то это число делится на 5 ” – И

Эквиваленцией двух предикатов F(x) и Q(x), определенных на одном и том же множестве X, называют предикат F(x)↔Q(x) такой, что для всех a є X, его значение равно F(a)↔Q(a)

Пример: Даны предикаты. Составить эквиваленцию предикатов и выяснить их истинность.

F(x): “натуральное число ***x*** делится на 3”

Q(x): “сумма цифр числа ***x*** делится на 3”

F(x)↔Q(x): ”натуральное число ***x*** делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3” – И

Отрицанием предиката F(x) называется предикат $\overline{F(x)}$, определенный одним и тем же множеством X, значением которого для любого a є X, является отрицание выказывания $\overline{F(x)}$.

Пример: Дан предикат F. Найти его отрицание.

F(x): “$\boldsymbol{x} \geq 5$”, x є R

$\overline{F(x)}$: “$\boldsymbol{x}<5$”, x єR

Два предиката, заданные на одном и том же множестве *X,* называются равносильными, если множества их истинности совпадает.

2.4 Варианты заданий

Задание № 1

Является ли данное выражение предикатом? Обоснуйте свой ответ.

№ варианта	Выражение
1	«x делится на 5» (x∈ N);
2	«Река x впадает в озеро Байкал» (x пробегает множество названий всевозможных рек);
3	«$x^2 + 2x + 4$» (x∈ R);
4	«$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$» (x, y ∈R);
5	«x есть брат y» (x, y пробегают множество всех людей);
6	«x и y лежат по разные стороны от z» (x, y пробегают множество всех точек, а z — всех прямых одной плоскости);
7	«ctg 45° = 1»;
8	«x перпендикулярна y» (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости);

9	«$x^2 + x - 6 = 0$» ($x \in R$);
10	«Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2+x - 6 = 0$»;
11	«$x+y=5$» ($x \in R$,$y \in R$);
12	«x параллельно y» (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости);
13	«$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$» ($x, y \in R$);
14	«cos 45° = 2»;
15	«Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2+2x - 4 = 0$».

Задание № 2

Для каждого из следующих высказываний найдите предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей.

№ варианта	Высказывание
1	«3 + 4 = 7»;
2	«Вера и Надежда — сестры»;
3	«Сегодня — вторник»;
4	«Город Саратов находится на берегу реки Волги»;
5	«sin 30° = 0,5»;
6	«А. С. Пушкин — великий русский поэт»;
7	«32 + 42 = 52»;
8	«Река Индигирка впадает в озеро Байкал»;
9	«Если число делится на 3, то оно делится на 9»;
10	«Луна есть спутник Марса»;
11	«Треугольник АВС - равнобедренный»;
12	«Четырехугольник АВСД - параллелограмм»;
13	«9 делится нацело на 3»;
14	«Ю.А.Гагарин – первый космонавт мира»;

15	«22 – простое число».

Задание № 3

Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над указанными множествами.

№ варианта	Предикаты
1	«x кратно 3», M= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
2	«x кратно 3», M= (3, 6, 9, 12};
3	«x кратно 3», M= {2, 4, 8};
4	«$x^2 + 4 > 0$», M= R;
5	«sin x > 1», M = R;
6	«$x^2 + x - 6 = 0$», M=R;
7	«$x_1 < x_2$», M_1 = {1, 2, 3, 4, 5}, M_2 = {3, 5, 7};
8	«x_1 делит x_2», $M_1 = M_2$ = {2, 3, 4, 6};
9	«$\|x_1\| + x_2 > 12$», M_1 = {-2, 4, 8}, M_2 = {0, 7, 9, 11};
10	«$x_1 + x_2 < 0$», M_1 = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, M_2 = {-3, 1, 2};
11	«$x^2 + 9 < 0$», M= R;
12	«cos x > 1», M = R;
13	«x_1 делится нацело на x_2», $M_1 = M_2$ = {2, 3, 4, 6};
14	«$x^2+2x+1=0$ », M=R;
15	«(x-5)(x+2)=0», M=R.

Задание № 4

Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих двухместных предикатов, заданных на множестве действительных чисел R.

№ варианта	Предикаты	№ варианта	Предикаты
1	$x = y$	9	$x^2+y^2=5$
2	$x + 3y < 6$	10	$y=2x+1$
3	$\|x\| = \|y\|$	11	$x^2+y^2=7$

4	$x^2 + y^2 = 9$	12	$y=3x-1$
5	$xy = 0$	13	$x^2+y^2<25$
6	$x^2 < y$	14	$x^2+y^2\geq 25$
7	$x^2 = y^2$	15	$y=5x$
8	$y = 1/x$		

Задание № 5

Изобразите на координатной прямой множества истинности следующих предикатов.

№ варианта	Предикаты	№ варианта	Предикаты
1	а) $(x > 2) \vee (x < 2)$	9	а) $(x >- 3) \wedge (x \leq 0)$
	б) $(x > 1) \leftrightarrow (x < 12)$		б) $(x \geq -1) \leftrightarrow (x \geq 0)$
2	а) $(x > -2) \wedge (x < 2)$	10	а) $(x \geq 2) \vee (x \leq 2)$
	б) $(x > 1) \leftrightarrow (x > -2)$		б) $(x \geq 1) \leftrightarrow (x < 10)$
3	а) $(x > 2) \leftrightarrow (x < 2)$	11	а) $(x \geq 3) \vee (x \leq 6)$
	б) $(x > -3) \wedge (x < 4)$		б) $(x \geq 0) \leftrightarrow (x < 1)$
4	а) $(x > 1) \wedge (x < 2)$	12	а) $(x \geq 2) \wedge (x \leq 9)$
	б) $(x > 1) \rightarrow (x > -2)$		б) $(x \geq 0) \leftrightarrow (x < 10)$
5	а) $(x > 1) \vee (x < 2)$	13	а) $(x \geq 4) \wedge (x \leq -8)$
	б) $(x > -1) \rightarrow (x > -2)$		б) $(x \geq 0) \leftrightarrow (x \leq 1)$
6	а) $(x > 3) \vee (x < -2)$	14	а) $(x \geq 4) \vee (x \leq -6)$
	б) $(x > 0) \rightarrow (x > -2)$		б) $(x \geq 7) \leftrightarrow (x \leq 1)$
7	а) $(x >- 5) \wedge (x \leq -2)$	15	а) $(x \geq 3) \vee (x \geq -2)$
	б) $(x \geq -1) \rightarrow (x > -2)$		б) $(x > 0) \rightarrow (x \leq -2)$
8	а) $(x >- 3) \wedge (x \leq 0)$		
	б) $(x \geq -1) \rightarrow (x \geq -2)$		

2.5 Вопросы к защите практической работы № 9

1) Что называется предикатом? Приведите примеры предикатов.

2) Что называется множеством истинности предиката?

3) Какие предикаты называются одноместными, двуместными, n-местными? Как они обозначаются? Приведите примеры.

4) Перечислите операции, которые можно осуществлять над предикатами.

5) Что называют конъюнкцией двух предикатов?

6) Что называют дизъюнкцией двух предикатов?

7) Что называют импликацией двух предикатов?

8) Что называют эквиваленцией двух предикатов?

9) Что называют отрицанием предиката?

10) Какие предикаты называются равносильными? Приведите примеры равносильных предикатов.

3 Практическая работа № 10. Высказывания с кванторами

Цель работы: Изучить понятие кванторы. Научиться записывать высказывания, используя кванторы, и определять их истинность. Научиться строить отрицание высказывания с кванторами.

3.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

3.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

3.3 Методические указания к практической работе № 10

3.3.1 Понятие кванторов

Рассматривая понятия предиката, мы указали один из способов получения высказывания. Для этого достаточно в предикат подставить какое-нибудь значение переменной.

Существуют и другие способы получения высказываний из высказывательных форм (предикатов).

Рассмотрим предикат $F(x)$, $x \in X$:

1) Предложение «Для всех $x \in X$ истинно $F(x)$» является высказыванием.

Это высказывание обозначается: $(\forall x \in X)F(x)$

Символ $\forall$ - называют квантором всеобщности (общности), а присоединение этого символа к предикату $F(x)$ – «навешивание квантора всеобщности»

Квантор общности выражается с помощью слов « каждый», «всякий», «любой».

2) Из предиката $F(x)$, где $x \in X$ можно получить другое высказывание «Во множестве X существует такой элемент a, что $F(a)$ истинное высказывание»

Это высказывание обозначают: $(\exists x \in X)F(x)$

Символ $\exists$ - называют квантором существования.

Квантор существования выражается словами «некоторые», «найдётся», «существует» и др.

3) Можно составить и такое высказывание «Во множестве X есть один и только один элемент a, такой что F(a) - истинное высказывание».

Это высказывание обозначают: $(\exists! x \in X)F(x)$.

Символ $\exists!$ – называют квантором существования и единственности.

Он выражается словами «единственный», «один и только один».

Пример: Записать предложения с помощью кванторов, и определить их истинность:

1) «Все целые числа кратны 3»

F(x) : «число x кратно 3»

$(\forall \mathbf{x} \in X)F(x)$ – Л

2) «Некоторые целые числа кратны 3»

$(\exists x \in X)F(x)$ – И.

Рассмотренные примеры получения высказываний с помощью кванторов относятся к одноместным предикатам. Всё сказанное остаётся справедливым и для многоместных предикатов, но при этом надо иметь в виду, что в подобных случаях для получения высказываний надо связать квантором каждую переменную.

При навешивании кванторов на многоместные предикаты, каждая переменная может быть связанная своим квантором. При этом два квантора одного наименования можно менять местами, истинность высказывания при этом не изменится. При навешивании разноименных кванторов нельзя менять местами их порядок, т.к. может измениться истинность высказывания.

Примеры:

1)X – это множество людей; F(x) : «Рост человека x меньше 180 см».

Рассмотрим все варианты навешивания кванторов, определим их истинность:

$(\forall x \in X)F(x)$ – «У всех людей рост меньше 180 см» - Л

$(\exists x \in X)F(x)$ – «У некоторых людей рост меньше 180 см» - И

$(\exists! x \in X)F(x)$ – «У единственного человека рост меньше 180 см» - Л

2) Q(x): «2x+3=9», $x \in R$;

$(\forall x \in X)Q(x)$ – «Любое действительное число являются корнем уравнения 2x+3=9»-Л

$(\exists! x \in X)F(x)$ –«Единственное число является корнем уравнения 2x+3=9» - И

3) F(x, y) – «Человек x родился в году y»

X – множество людей;

Y – множество годов рождения;

$x \in X$, $y \in Y$

$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)F(x)$ F(x, y) «Для каждого человека x есть год y, в котором он родился»– И

$(\exists y \in Y)(\forall x \in X)$ F(x, y) – «Существует год y, в котором родился любой человек x» - Л

3.3.2 Построение отрицание высказывания с кванторами

Правило: Для того чтобы построить отрицание высказываний с кванторами, нужно заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение стоящие после квантора, - на его отрицание.

В символическом виде эти правила можно записать так:

$\overline{(\forall x \in X)F(x)} = (\exists x \in X)\ \overline{F(x)}$

$\overline{(\exists x \in X)F(x)} = (\forall x \in X)\ \overline{F(x)}$

Таким образом, отрицание высказывания с кванторами может быть построено двумя способами:

1) Заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение стоящие после квантора, - на его отрицание.

2) Перед данным высказыванием ставятся слова «неверно, что».

Пример:

$(\exists x \in X)A(x)$: «Некоторые двузначные числа больше 60»

$\overline{(\exists x \in X)A(x)} = (\forall x \in X)\overline{A(x)}$: «Все двузначные числа не больше 60.»

3.4 Варианты заданий

Задание № 1

Запишите следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел:

Вариант 1

$(\forall x)\ (\exists y)\ (x + y= 7)$

Вариант 2

$(\exists x)\ (\forall y)\ (x + y= 7)$

Вариант 3

$(\forall x)\ (\forall y)\ (x + y= 7)$

Вариант 4

$(\forall y)\ (\exists x)\ (x + y= 7)$

Вариант 5

$(\exists y)\ (\forall x)\ (x + y= 7)$

Вариант 6

$(\exists x)\ (\exists y)\ (x + y= 7)$

Вариант 7

$(\exists b)\ (\forall a)\ (\exists x)\ (x^2 + ax + b = 0)$

Вариант 8

$(\exists a)\ (\forall b)\ (\exists x)\ (x^2 + ax + b = 0)$

Вариант 9

$(\exists b)\ (\exists a)\ (\exists x)\ (x^2 + ax + b = 0)$

Вариант 10

$(\forall b)\ (\forall a)\ (\exists x)\ (x^2 + ax + b = 0)$

Вариант 11

$(\exists x)\ (\forall y)\ (x^2 + y^2= 16)$

Вариант 12

$(\forall x)\ (\forall y)\ (x^2 + y^2= 16)$

Вариант 13

$(\forall x)\ (\exists y)\ (x^2 + y^2= 16)$

Вариант 14

$(\exists x)\ (\exists y)\ (x^2 + y^2= 16)$

Вариант 15

$(\forall y)\ (\exists x)\ (x^2 + y^2= 16)$

Задание № 2

Из следующих предикатов с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in R$):

Вариант 1

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Вариант 2

$(x - 3)\ (x + 3) < x^2$

Вариант 9

$x^2 + y^2 = 16$

Вариант 10

$x=x$

Вариант 3

$(x^2 + 1 = 0) \to ((x = 1) \lor (x = 2))$

Вариант 4

$(x<0) \lor (x=0) \lor (x>0)$

Вариант 5

$x^2 = y^2 \to x = y$

Вариант 6

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Вариант 7

$|x-y| \le 3$

Вариант 8

$x^2 = 25$

Вариант 11

$x^2 \ge 0$

Вариант 12

$x - 2=5$

Вариант 13

$x^2 - 4=0$

Вариант 14

$x^2 + 2x + 1 =0$

Вариант 15

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Задание № 3

Рассмотрите все варианты навешивания кванторов на предикат P(x,y) и опишите в словесной форме полученные высказывания. P(x,y) определен на множестве людей:

Вариант 1

«x является родителем y»

Вариант 2

«x живёт в одном городе с y»

Вариант 3

«x является родственником y»

Вариант 4

«x является сыном y»

Вариант 5

«x учится в одной группе с y»

Вариант 6

«x живёт в одном районе с y»

Вариант 9

«x является дочерью y»

Вариант 10

«x является отцом для y»

Вариант 11

«x живёт в одной стране с y»

Вариант 12

«x живёт на одной улице с y»

Вариант 13

«x является дедушкой для y»

Вариант 14

«y является родителем x»

Вариант 7

«х является бабушкой для у»

Вариант 8

«х является соседом для у»

Вариант 15

«у является родственником х»

3.5 Вопросы к защите практической работы № 10

1) Какие существуют способы получения высказываний из высказывательных форм?

2) Что называется квантором всеобщности? Каким символом он обозначается?

3) С помощью, каких слов выражается квантор общности? Приведите примеры.

4) Что называется квантором существования? Каким символом он обозначается?

5) С помощью, каких слов выражается квантор существования? Приведите примеры.

6) Что называется квантором единственности? Каким символом он обозначается?

7) С помощью, каких слов выражается квантор единственности? Приведите примеры.

8) Измениться ли истинность высказывания, если поменять местами в многоместном предикате одноименные кванторы? Привести примеры.

9) Измениться ли истинность высказывания, если поменять местами в многоместном предикате разноименные кванторы? Привести примеры.

10) Перечислить способы построения отрицания высказывания с кванторами. Привести примеры.

Список использованных источников

1 **Игошин, В.И.** Математическая логика и теория алгоритмов / В.И.Игошин - 2-е изд., стереотип.- М.: Академия, 2008.- 449 с.

2 **Игошин, В.И.** Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В.И.Игошин - 2-е изд., стереотип.- М.: Академия, 2008.- 305 с.

3 **Спирина, М.С.** Дискретная математика: учебник для СПО / М.С. Спирина, П.А. Спирин. - 2-е изд., стереотип. - М.: Академия, 2006. – 368 с.

4 **Шапорев, С.Д.** Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий: учебное пособие для вузов / С.Д. Шапорев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 400 с.

5 **Ерусалимский, Я.М**. Дискретная математика: Теория, задачи, приложения: учебное пособие для вузов / Я.М. Ерусалимский. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Вузовская книга, 2008. -288 с.

6 **Канцедал, С.А.** Дискретная математика: учебник для СПО / С.А. Канцедал. – М.: ФОРУМ: ИНФРА - М, 2011. – 224 с.