Министерство образования и науки Российской Федерации

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КОЛЛЕДЖ
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Предметно-цикловая комиссия информационных технологий

Т.В. Атяскина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ЧАСТЬ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Оренбург
2015

УДК 517(075.32)
ББК 22.176 я 73
А - 92

Атяскина, Т.В.
А 92 Математические методы: методические указания к лабораторным работам. В 2 ч. /Т.В.Атяскина, Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2015. - Ч.2– 94 с.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ, обеспечивающих учебный процесс по дисциплине "Математические методы" в Университетском колледже ОГУ для студентов 4 курса в 7 семестре специальности 230115 Программирование в компьютерных системах очной формы обучения.

Методические указания составлены с учетом Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов — утвержденного приказом № 804 от 28.07.2014 Министерством образования и науки Российской Федерации.

УДК 517(075.32)
ББК 22.176 я 73

Содержание

Введение

Учебная дисциплина «Математические методы» является общепрофессиональной дисциплиной вариативной части профессионального цикла, которая обеспечивает профессиональный уровень подготовки специалиста и соответствует развитию их профессионально значимых качеств.

В данном пособии представлены лабораторные работы по разделам: Математические методы в теории графов, Динамическое программирование и

Задачи теории принятия решений. Целью лабораторных работ является научить студентов от словесного описания задачи перейти к абстрактной математической модели, реализовать математическую модель в виде программного кода, найти оптимальное решение задач.

1 Лабораторная работа №1. Матричное представление графа с информационной поддержкой

Цель работы: Изучить матричное представление графа. Составить программу ввода ориентированного графа в виде матрицы смежности с информационной поддержкой. Перевести матрицу смежности в матрицу инциденции, в матрицу достижимости.

1.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) построить ориентированный граф не менее чем из 8 вершин и составить для него матрицу смежности;

3) перевести матрицу смежности в матрицу инциденции и в матрицу достижимости;

4) составить и отладить программу в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

1.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение составленной задачи в тетради;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

1.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №1

1.3.1 Понятие графа

Графом G=(X,U) называется пара двух конечных множеств: X – множество точек (вершин) и U – множество линий (ребер), соединяющих некоторые пары точек.

Если граф имеет ребро, у которого начало и конец совпадают, то это ребро называется **петлей**.

Если ребро графа имеет направление, то оно называется **дугой**.

1.3.2 Виды графов

Существуют следующие виды графов:

1) Граф, состоящий из вершин и соединяющих их ребер, называется **неориентированным (н-граф)**.

2) Граф, состоящий из вершин и соединяющих их дуг, называется **ориентированным (орграф)**.

3) Ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются *параллельными или кратными*. Граф, содержащий кратные ребра называется **мультиграфом**.

4) Граф, в котором проведены все возможные ребра, но не имеющий петель и кратных ребер, называется **полным**.

5) Граф, содержащий как ребра, так и дуги называется **смешанным**.

1.3.3 Матричное представление графа

Матрицей смежности графа G - называется квадратная матрица порядка n, где n – число вершин графа G и определяется следующим образом: $A_{nxn}=[a_{ij}]$, где

$$a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ – есть ребро (дуга) } (x_i;\, x_j) \text{ или петля;}\\ 0 \text{ – нет ребра (дуги) } (x_i;\, x_j).\end{cases}$$

Матрицей ициденции графа G с n вершинами и m дугами называется матрица $B_{nxm}=[b_{ij}]$, где

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } x_i \text{ – начало дуги } (x_i;\, x_j), \text{ или петля,}\\ -1, \text{ если } x_i \text{ – конец дуги } (x_i;\, x_j),\\ 0, \text{ если нет дуги } (x_i;\, x_j).\end{cases}$$

В матрицу инциденции н-графа заносят 1, если ребро инцидентно соответствующей вершине, 0 – в противном случае.

Путь – это упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны.

Матрицей достижимости графа G называется квадратная матрица порядка n, где n – число вершин графа и определяется следующим образом:

$$D_{nxn}=[d_{ij}],$$

где

$$d_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если есть путь из } x_i \text{ в } x_j,\\ 0, \text{ если нет пути из } x_i \text{ в } x_j.\end{cases}$$

Пример: Дан ориентированный граф G (рисунок 1). Построить матрицу смежности, инциденции, достижимости графа G.

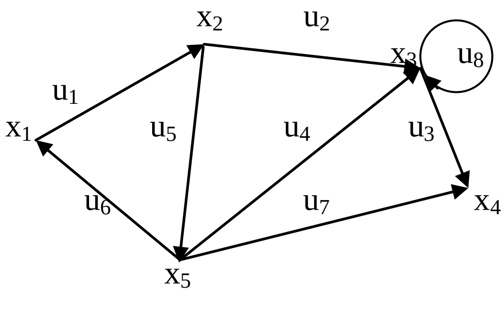

Рисунок 1 – Граф G

Решение: Матрица смежности графа G представлена в таблице 1.

Таблица 1 – Матрица смежности графа G

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	0
X_2	0	0	1	0	1
X_3	0	0	1	1	0
X_4	0	0	0	0	0
X_5	1	0	1	1	0

Матрица инциденции графа G представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Матрица инциденции графа G

Вершины	Дуги							
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	1	0	0	0	0	-1	0	0
x_2	-1	1	0	0	1	0	0	0
x_3	0	-1	1	-1	0	0	0	1
x_4	0	0	-1	0	0	0	-1	0
x_5	0	0	0	1	-1	1	1	0

Матрица достижимости графа G представлена в таблице 3.

Таблица 3 – Матрица достижимости графа G

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1	0
x_3	0	0	1	1	0
x_4	0	0	0	1	0
x_5	1	1	1	1	1

1.4 Задание для лабораторной работы №1

Нарисовать ориентированный граф не менее чем из 8 вершин и составить матрицы смежности, инциденции и достижимости. Разработать программу ввода матрицы смежности с информационной поддержкой и с редактированием и перевода матрицы смежности в матрицы инциденции и достижимости, используя среду программирования Delphi.

1.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №1

1) Что называется графом? Приведите пример.
2) Что называется ребром, вершиной, дугой, петлей, путем в графе?
3) Перечислите виды графов. Приведите примеры на каждый вид графа.
4) Что называется матрицей смежности графа?
5) Как определить число ребер и число вершин н-графа и орграфа по матрице смежности?
6) Что называется матрицей инциденции для н-графа (орграфа)?
7) Как определить число дуг и число вершин н-графа (орграфа) по матрице инциденции?
8) Что называется циклом в графе?
9) Что называется матрицей достижимости графа?

2 Лабораторная работа №2. Нахождение кратчайшего остова в графе алгоритмом Краскала

Цель работы: Изучить алгоритм Краскала. Составить программу нахождения кратчайшего остова в графе алгоритмом Краскала.

2.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) составить постановку задачи, выбрав предметную область;
3) найти кратчайший остов построенного графа алгоритмом Краскала;

4) составить и отладить программу в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

2.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение составленной задачи в тетради;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

2.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №2

2.3.1 Понятия дерева и остова в графе

Связанный ациклический граф называется **деревом**.

Н-граф называется **неориентированным деревом**, если он связан и не содержит циклов, а значит петель и кратных рёбер.

Дерево – это минимально связный граф, в том смысле, что при удалении хотя бы одного ребра он теряет связность.

Теорема: В дереве с n вершинами всегда n-1 ребро.

Ориентированным деревом или **ордеревом**, или корневым деревом называют орграф со следующими свойствами:

1) Существует единый узел, полустепень захода которого равна нулю, он называется корнем дерева;

2) Полустепень захода всех остальных узлов равна единице;

3) Каждый узел достижим из корня.

Остовом графа называется подграф являющийся деревом.

Если граф полный, то в графе существует 2^{2^n} остовов, где n – число вершин графа.

2.3.2 Алгоритм Краскала

1) Строится нуль-граф (одни вершины без ребер).
2) Упорядочиваются ребра графа в порядке не убывания их весов.
3) Выбираются из упорядоченного списка ребра, такие чтобы они не образовывали цикл в графе.
4) Если выбрано n-1 ребро (n – число вершин графа), то алгоритм заканчивает работу.
5) Остов должен включать в себя все вершины графа.

Пример: Найти кратчайший остов в графе (рисунок 2) алгоритмом Краскала.

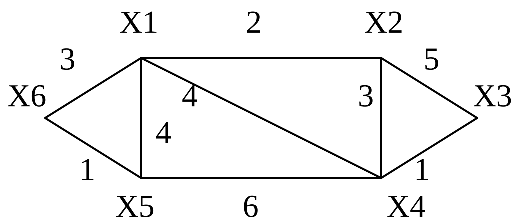

Рисунок 2 – Взвешенный граф

Решение:

1) Построим таблицу ребер данного графа, в порядке неубывания их весов (таблица 4).

Таблица 4 – Список ребер графа в порядке неубывания весов

Начало	Конец	Вес
X5	X6	1
X3	X4	1
X1	X2	2
X1	X6	3
X2	X4	3
X1	X4	4
X1	X5	4
X2	X3	5
X4	X5	6

2) Из таблицы 4 выбираем ребра, которые не образуют цикл в графе и строим кратчайший остов (рисунок 3).

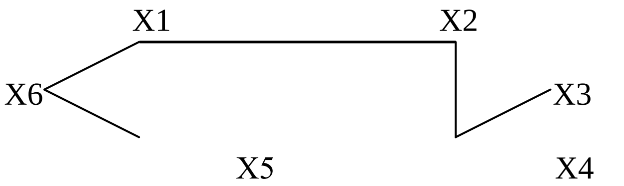

Рисунок 3 – Кратчайший остов графа

3) Вычислим длину кратчайшего остова: d = 1+1+2+3+3 = 10

Для реализации алгоритма Краскала на ПК необходимо:

1) Построить матрицу смежности исходного графа;

2) Составить список ребер с их весами и отсортировать их одним из способов сортировки. Для того чтобы уменьшить время сортировки можно сортировать не весь список, а N-1 ребро, с минимальным весом;

3) Для проверки на цикл можно использовать построение матрицы достижимости после каждого добавления ребра. Добавляем ребро XiXj, смотрим есть ли единица в матрице достижимости на месте XiXj, если есть, то ребро XiXj не перебрасываем в матрицу смежности исходного остова, так как получаем цикл, если единицы нет, то ребро XiXj заносим в матрицу смежности остова.

2.4 Задание для лабораторной работы №2

Составить постановку задачи, выбрав предметную область (составить граф не менее чем из 8 вершин). Найти кратчайший остов в графе алгоритмом Краскала. Разработать программу решения задачи в среде программирования Delphi.

2.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №2

1) Что называется деревом? Приведите пример.
2) Что называется остовом? Приведите пример.
3) Что называется кратчайшим остовом?
4) Что называется циклом в графе?
5) Алгоритм Краскала.

3 Лабораторная работа №3. Нахождение кратчайшего остова в графе алгоритмом Прима

Цель работы: Изучить алгоритм Прима. Составить программу нахождения кратчайшего остова в графе алгоритмом Прима.

3.2 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) составить постановку задачи, выбрав предметную область;
3) найти кратчайший остов построенного графа алгоритмом Прима;
4) составить и отладить программу в среде программирования Delphi;
5) оформить отчет по лабораторной работе;
6) защитить лабораторную работу.

3.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение составленной задачи в тетради;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

3.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №3

3.3.1 Алгоритм Прима

Алгоритм Прима определяет кратчайший остов в графе.

Суть данного метода заключается в том, что построение кратчайшего остова выполняется путем добавления к строящемуся остову некоторой ближайшей к нему вершины и соответствующего ребра.

Обозначения:

Ts – множество вершин строящегося остова

As – множество ребер строящегося остова

Для вершины X_1 делаем пометку X_1^*. Выписываем связи всех остальных вершин с помеченной вершиной: [помеченная вершина; вес] – если связь есть или [0;∞] – если связи нет. Среди имеющихся связей выбираем вершину, которая имеет с помеченной вершиной наименьшее соединение. Такую вершину добавляем к множеству Ts, а соответствующее ребро к множеству As. Алгоритм заканчивает свою работу, если n=N(Ts), где n – количество вершин графа, N(Ts) – количество вершин остова.

Пример: Найти кратчайший остов в графе (рисунок 4) алгоритмом Прима.

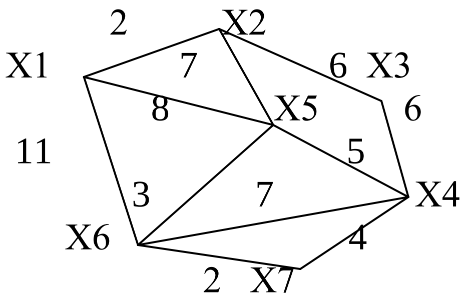

Рисунок 4 – Граф с весами

Решение:

1) Выписываем связи вершин графа с помеченной вершиной:

X1*:	X2*:	X3*:
x2-[x1; 2]-min	x3-[x2; 6]-min	x4-[x3; 6]-min
x3-[0, ∞]	x4-[0, ∞]	x5-[0, ∞]
x4-[0,∞]	x5-[x2; 7]	x6-[0, ∞]
x5-[x1; 8]	x6-[0, ∞]	x7-[0, ∞]
x6-[x1; 11]	x7-[0, ∞]	
x7-[0,∞]		

X4*:	X7*:	X6*:
x5[x4; 5]	x5[0, ∞]	x5[x6; 3]-min
x6[x4; 7]	x6[x7; 2]-min	
x7[x4; 4]-min		

Ts = {x1, x2, x3, x4, x7, x6, x5}

As = { (x1;x2), (x2;x3),(x3;x4),(x4;x7),(x7;x6),(x6;x5)}

2) Используя найденные множества Ts и As, построим кратчайший остов данного графа (рисунок 5).

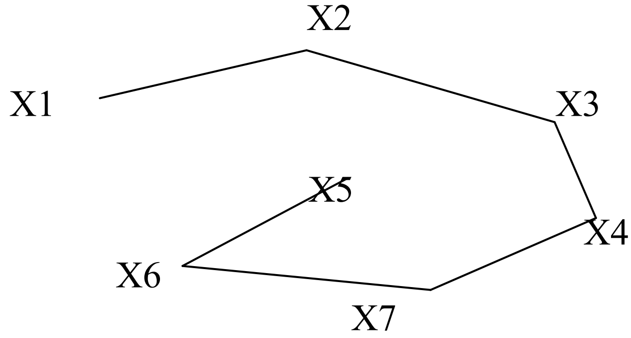

Рисунок 5 – Кратчайший остов графа

4) Найдем длину получившегося остова: $d = 2+6+6+4+2+3 = 23$.

3.4 Задание для лабораторной работы №3

Составить постановку задачи, выбрав предметную область (составить граф не менее чем из 8 вершин). Найти кратчайший остов в графе алгоритмом Краскала. Разработать программу решения задачи в среде программирования Delphi.

3.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №3

1) Что называется деревом? Приведите пример.
2) Что называется остовом? Приведите пример.
3) Что называется кратчайшим остовом?
4) Что называется циклом в графе?
5) Алгоритм Прима.

4 Лабораторная работа №4. Решение задачи размещения

Цель работы: Изучить и решить задачу размещения. Составить программу решения задачи размещения.

4.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) составить постановку задачи, выбрав предметную область;
3) решить составленную задачу размещения;
4) составить и отладить программу в среде программирования Delphi;
5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

4.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение составленной задачи в тетради;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

4.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №4

4.3.1 Задача размещения объектов

Часто возникают задачи, в которых необходимо разместить какой-то центр обслуживания таким образом, чтобы расстояние до обслуживания жителей было оптимально. Рассмотрим две ситуации:

1) В случае различных охранных фирм, милиционерских участков рассматривают минимальное расстояние до наиболее удаленных объектов обслуживания (минимаксная задача).

2) В случае размещения телефонных коммутаторов, школ, почтовых отделений рассматривают минимальные суммы расстояний от центра облуживания до объектов и обратно (минисуммная задача).

Задача в общем виде:

Дана сеть с n вершинами, которым сопоставлены веса p_1, p_2, … , p_n. Найти точку U на сети такую, что

$$F_i = \sum_{i=1}^{n} d_{iu} p_i \to \min, \qquad (1)$$

где d_{iu} расстояние от i вершины до точки u.

Пример: Дана сеть с семью вершинами (рисунок 6), где вершины отвечают за населённые объекты, в которых проживают школьники. Число учеников в вершинах заданы числами P=(80, 100, 140, 90, 60, 50, 40), в графе на ребрах указаны расстояния между населенными объектами. Необходимо поместить школу в оптимальном месте.

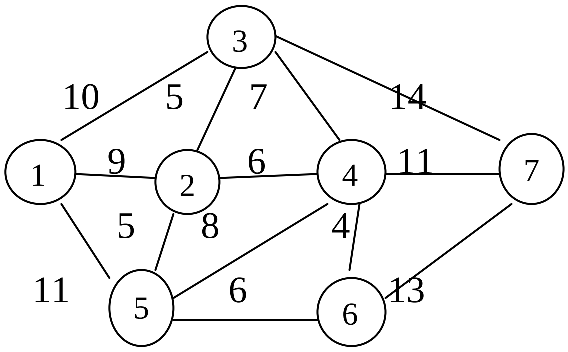

Рисунок 6 – Сеть населенных объектов

Решение:

1) Построить матрицу кратчайших расстояний из каждой вершины в каждую (рисунок 7).

D_{ij} =

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
X1	0	9	10	15	11	17	24
X2	9	0	5	6	5	10	17
X3	10	5	0	7	10	11	14
X4	15	6	7	0	8	4	11
X5	11	5	10	8	0	6	19
X6	17	10	11	4	6	0	13
X7	24	17	14	11	19	13	0

Рисунок 7 – Матрица кратчайших расстояний

2) Найти значения функции F по формуле (1) в каждой вершине:

F1=80*0+9*100+10*140+15*90+11*60+17*50+24*40=6120

F2=9*80+0*100+5*140+6*90+5*60+10*50+17*40=3440

F3=10*80+5*10+0*140+7*90+10*60+11*50+14*40=3640

F4=15*80+6*100+7*140+0*90+8*60+4*50+11*40=3800

F5=11*80+5*100+10*140+8*90+0*60+6*50+19*40=4560

F6=17*80+10*100+11*140+4*90+6*60+0*50+13*40=4930

F7=24*80+17*100+14*140+11*90+19*60+13*50+0*40=8360

3) Среди найденных значений функции F выбираем минимальное.

$$F_{min} = F_2 = 3440$$

Ответ: Школу нужно разместить во второй вершине графа.

4.4 Задание для лабораторной работы №4

Составить постановку задачи размещения объектов, выбрав предметную область (составить граф не менее чем из 8 вершин).Решить задачу размещения. Разработать программу решения задачи в среде программирования Delphi.

4.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №4

1) Какого типа задачи относятся к задачам размещения объектов?
2) Сформулируйте задачу размещения в общем виде.

5 Лабораторная работа №5. Метод сетевого планирования и управления

Цель работы: Приобретение навыков решения задач методом сетевого планирования и управления и составление программы решения задач.

5.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;

3) решить задачу методом сетевого планирования и управления аналитически;

4) составить и отладить программу в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

5.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

5.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №5

5.3.1 Метод сетевого планирования и управления

Сетевое планирование применяется для создания оптимального плана выполнения работ в сфере промышленного производства, строительства, организации научно-исследовательских работ и т.д. Исходным материалом для сетевого планирования является программа выполнения работ, которая содержит перечень работ с указанием длительности выполнения каждой. На основе этих данных строится сетевая модель (график).

Сетевая модель – графическое отображение выполняемых работ в их технологической последовательности с указанием времени выполнения каждой работы (рисунок 8).

Основными элементами сетевой модели являются:

1) Событие – фиксируемый момент времени завершения i-й работы и начало выполнения (i+1)-й работы. На сетевом графике событие обозначается кружком с порядковым номером.

2) Работа – это активные действия по созданию материального или интеллектуального продукта с привлечением различных ресурсов: финансовых, материальных, энергетических и т.д. Различают несколько видов работ:

- действительная работа, определение дано выше (на сетевом графике изображается сплошной линией со стрелкой);

- фиктивная работа – логическая связь между событиями, не требующая затрат каких-либо ресурсов (изображается на сетевом графике пунктирной линией).

3) Путь – это непрерывная последовательность событий и работ, которые включаются только один раз.

4) Критический путь – это путь, который содержит работы, не имеющие резервы по времени для своей реализации. Работы, имеющие резервы по времени, называются некритическими.

5) Исходное событие. Каждая сетевая модель имеет одно исходное событие, из которого вытекает одна или несколько работ. Исходное событие не имеет входящих работ.

6) Завершающее событие. Каждая сетевая модель имеет одно завершающее событие, в котором заканчивается одна или несколько работ. Завершающее событие не имеет выходящих работ.

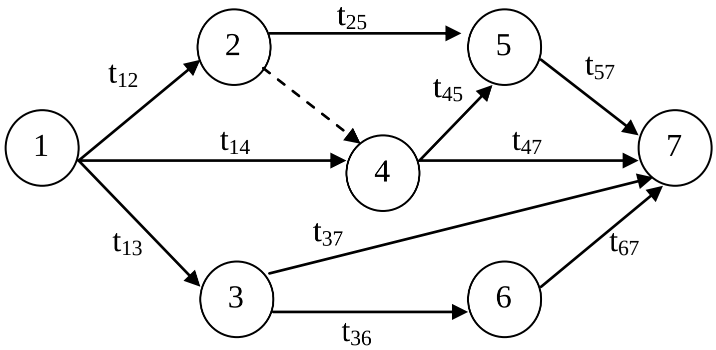

Рисунок 8 - Пример сетевой модели

5.3.2 Расчет временных параметров

Главной характеристикой сетевого графика является длина критического пути. Расчет критического пути выполняют в два этапа (от начала к концу сетевого графика и от конца к началу сетевого графика). На первом этапе определяют ранние сроки наступления событий, а на втором – поздние сроки наступления событий.

1) Ранние сроки наступления событий вычисляются по формуле (2).

$$t_р(j)=\max\{ t_р(i)+t(i, j) \}, \tag{2}$$

где $t_р(i)$, $t_р(j)$ – соответственно ранние сроки свершения предыдущего и последующего событий;

$t(i, j)$ – время выполнения работ.

2) Поздние сроки наступления событий вычисляются по формуле (3).

$$t_п(i)=\min\{ t_п(j) - t(i, j) \}, \tag{3}$$

где $t_п(i)$, $t_п(j)$ – соответственно поздние сроки свершения предыдущего и последующего событий;

$t(i, j)$ – время выполнения работ.

3) Полный резерв времени вычисляется по формуле (4).

$$R(j)=t_п(j) - t_р(j), \tag{4}$$

Для оперативного контроля, полученные параметры наносят на сетевую модель, где каждое событие представляется в виде рисунка 9.

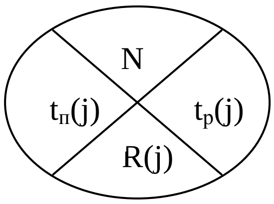

Рисунок 9 – Обозначение события сетевой модели с параметрами

Пример: На основании технологической последовательности и предварительных расчетов построена сетевая модель (рисунок 10). Требуется определить величину критического пути и полный резерв времени.

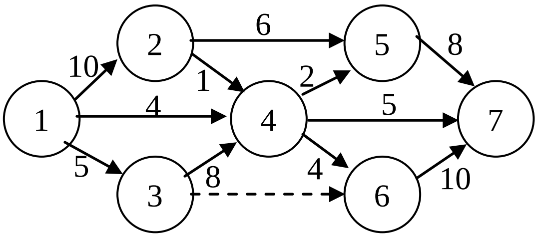

Рисунок 10 – Сетевая модель

Решение:

1) Вычислим ранние сроки свершения событий по формуле (2):

$$t_p(1) = 0$$

$$t_p(2) = \max\{t_p(1) + t_{12}\} = \max\{0 + 10\} = 10$$

$$t_p(3) = \max\{t_p(1) + t_{13}\} = \max\{0 + 5\} = 5$$

$$t_p(4) = \max\begin{Bmatrix} t_p(1) + t_{14} \\ t_p(2) + t_{24} \\ t_p(3) + t_{34} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 4 \\ 10 + 1 \\ 5 + 8 \end{Bmatrix} = 13$$

$$t_p(5) = \max\begin{Bmatrix} t_p(2) + t_{25} \\ t_p(4) + t_{45} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 10 + 6 \\ 13 + 2 \end{Bmatrix} = 16$$

$$t_p(6) = \max\begin{Bmatrix} t_p(3) + t_{36} \\ t_p(4) + t_{46} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 5 + 0 \\ 13 + 4 \end{Bmatrix} = 17$$

$$t_p(7) = \max\begin{Bmatrix} t_p(4) + t_{47} \\ t_p(5) + t_{57} \\ t_p(6) + t_{67} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 13 + 5 \\ 16 + 8 \\ 17 + 10 \end{Bmatrix} = 27$$

2) Вычислим поздние сроки свершения событий по формуле (3):

$$t_n(7) = t_p(7) = 27$$

$$t_n(6) = \min\{t_n(7) - t_{67}\} = \min\{27 - 10\} = 17$$

$$t_n(5) = \min\{t_n(7) - t_{57}\} = \min\{27 - 8\} = 19$$

$$t_n(4) = \min\begin{Bmatrix} t_n(7) - t_{47} \\ t_n(6) - t_{46} \\ t_n(5) - t_{45} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 27 - 5 \\ 17 - 4 \\ 19 - 2 \end{Bmatrix} = 13$$

$$t_n(3) = \min\begin{Bmatrix} t_n(6) - t_{36} \\ t_n(4) - t_{34} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 17 - 0 \\ 13 - 8 \end{Bmatrix} = 5$$

$$t_n(2) = \min\begin{Bmatrix} t_n(5) - t_{25} \\ t_n(4) - t_{24} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 19 - 6 \\ 13 - 1 \end{Bmatrix} = 12$$

$$t_n(1) = \min\begin{Bmatrix} t_n(4) - t_{14} \\ t_n(3) - t_{13} \\ t_n(2) - t_{12} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 13 - 4 \\ 5 - 5 \\ 12 - 10 \end{Bmatrix} = 0$$

3) Вычислим полный резерв времени каждого события по формуле (4)

R(1)= 0 – 0 = 0

R(2)= 12 – 10= 2

R(3)= 5 – 5 = 0

R(4)= 13 – 13 = 0

R(5)= 19 – 16 = 3

R(6)= 17 – 17 = 0

R(7)= 27 – 27 = 0

Занесем все параметры на сетевую модель (рисунок 11).

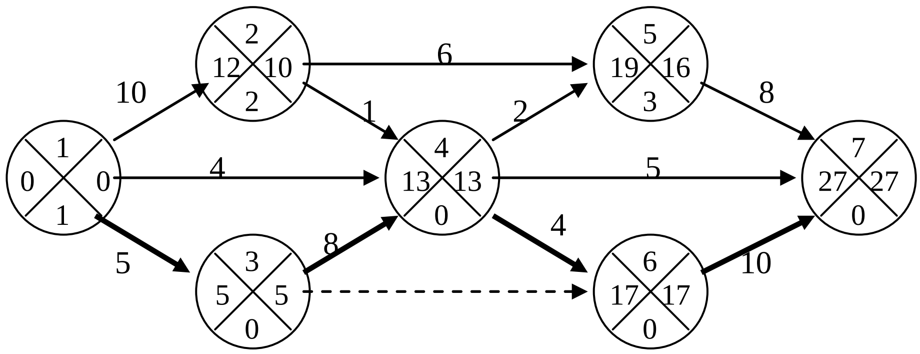

Рисунок 11 – Сетевая модель с временными параметрами

Ответ: Длина критического пути равна 27. На критическом пути находятся события: 1, 3, 4, 6, 7.

5.4 Задания для лабораторной работы №5

Рассчитать непосредственно на сетевом графике комплекса работ, согласно своего варианта (рисунок 12), ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, минимальное время выполнения комплекса (критический срок). Выделить на сетевом графике критический путь.

Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi.

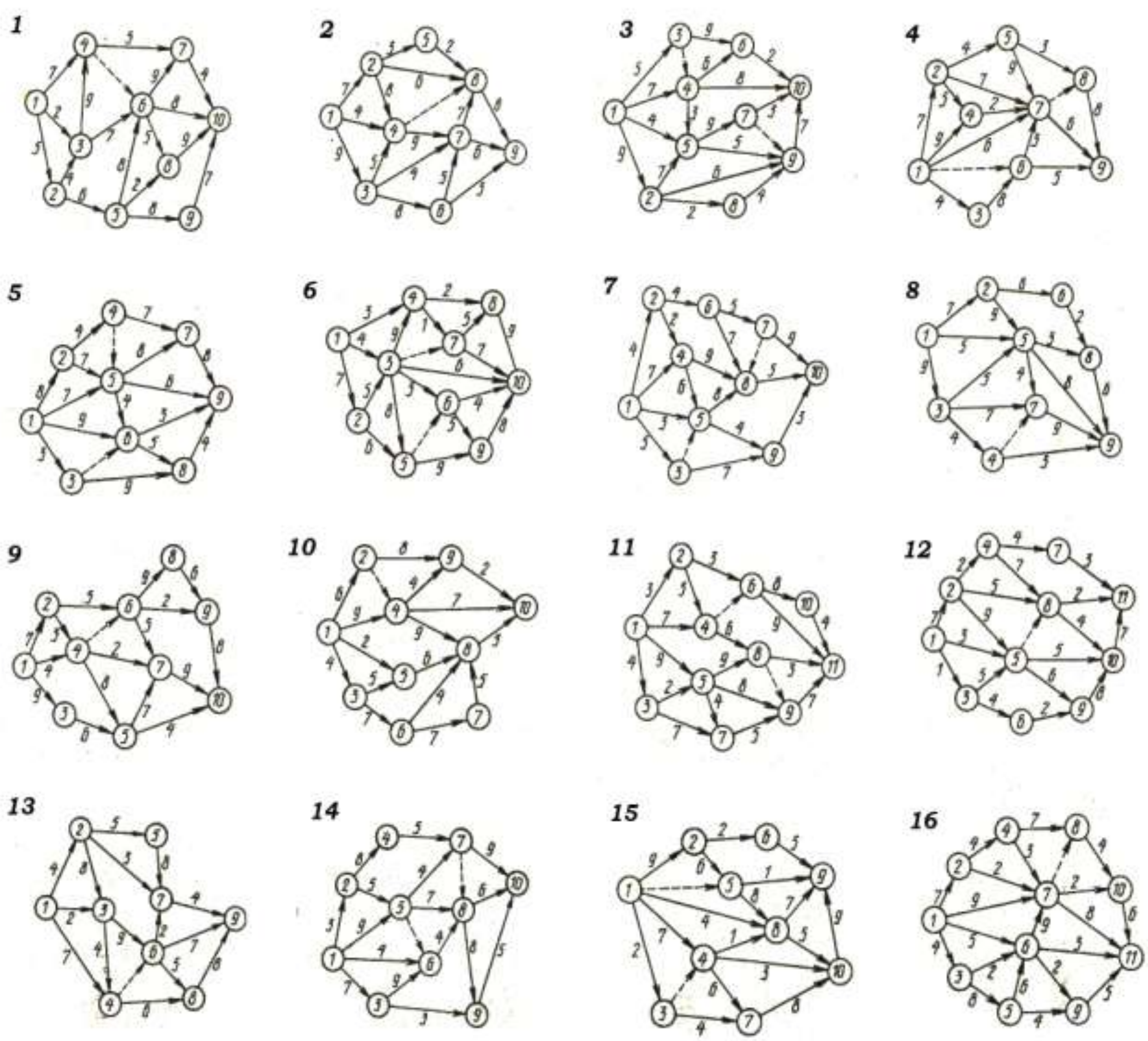

Рисунок 12 – Варианты заданий для лабораторной работы №5

5.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №5

1) Что такое событие?
2) Какая работа называется действительной, фиктивной работой?
3) Дайте определение исходному событию, завершающему событию?
4) Чем отличается критический путь от любого другого пути?
5) Какие работы и события называются критическими?
6) Что называется сетевой моделью?

7) Основные правила построения сетевой модели.

8) Как вычисляются ранние сроки свершения событий?

9) Как вычисляются поздние сроки свершения событий?

10) Что такое резервы времени и как они определяются?

6 Лабораторная работа №6. Решение задач методом динамического программирования

Цель работы: Приобретение навыков решения стандартных задач методом динамического программирования и составление программы решения задач.

6.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;

3) решить задачу методом динамического программирования аналитически.

4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

6.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

6.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 3

6.3.1 Метод динамического программирования

Под динамическим программированием понимают некоторый специальный метод оптимизации, суть которого состоит в отыскании оптимального решения путем выполнения вычислений в несколько шагов (этапов). Вся задача оптимизации разделяется на несколько шагов, причем все шаги могут быть уникальными или одинаковыми и чередоваться друг с другом.

При использовании динамического программирования многошаговая задача решается дважды: от конца к началу (определение условно-оптимального решения) и от начала к концу (определение безусловно- оптимального решения). Первый этап длительный и трудоемкий, второй - короткий и уточняет решение первого этапа.

6.3.2 Основное функциональное уравнение динамического программирования

$$F_i(x_{i-1};U_i) = \underset{U_i}{extr}(Z_i(x_{i-1};U_i) + F_{i+1}(x_i)) \ , \ i = \overline{1,N} \ , \qquad (5)$$

где:

x_{i-1} - множество состояний, в которых система находится перед i-м шагом;

x_i - множество состояний системы в конце i-го шага;

U_i – множество управлений на i-ом шаге, под воздействием которых система переходит в одно из состояний множества x_i;

$F_i(x_{i-1};U_i)$ - условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от i-го до n-го шага включительно;

$Z_i(x_{i-1};U_i)$ - значение целевой функции на i-ом шаге для всех управлений из множества U_i;

$F_{i+1}(x_i)$ - условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от (i+1)-го шага до N-го включительно.

На последнем N шаге справедлива следующая формула:

$$F_N(x_{N-1};U_N) = \underset{U_N}{extr}\, Z_N(x_{N-1};U_N), \qquad (6)$$

Пример: На данной сети дорог (рисунок 12) указаны стоимости доставки единицы груза из пункта в пункт. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из пункта 1 в пункт 10.

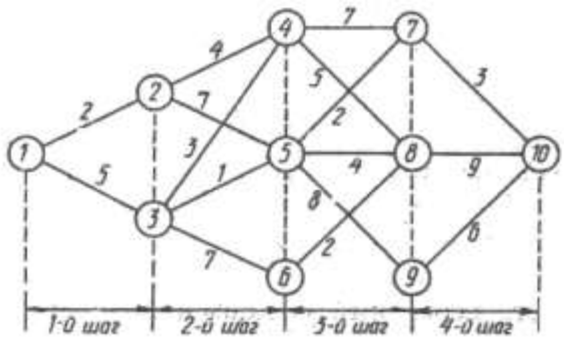

Рисунок 13 – Сеть дорог по доставке груза

Решение: Разобьем все пункты сети на группы (таблица 5). К группе I отнесем пункт 1, к группе II – пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта 1 (пункты 2 и 3), к группе III отнесем пункты, в которые можно попасть непосредственно из любого пункта группы II (4,5 и 6) и т.д. В результате движения транспорта с грузом из пункта 1 в пункт 10 можно рассматривать как четырехшаговый процесс.

Таблица 5 – Разбиение сети дорог на группы

I	II	III	IV	V
	2	4	7	
1	3	5	8	10
		6	9	

В качестве физической системы выступает транспорт с грузом, перемещающий из начального состояния c_1 (пункта 1) в конечное состояние c_{10} (пункт 10), и сеть дорог. Множество x_i – множество пунктов назначения на i-м шаге.

Управление U_i на i – м шаге состоит в выборе дороги (i,j), по которой следует направлять груз из данного пункта в соседний в общем направлении к пункту 10.

Значение z_i целевой функции на i – м шаге – это затраты на перевозку единицы груза из данного пункта в выбранный соседний пункт.

1) Первый этап условной оптимизации начнем с анализа четвертого шага. N=4, функциональное уравнение имеет вид (формула 7):

$$F_4(x_3,u_4)=\min_{u_4} z_4(x_3,u_4), \qquad (7)$$

$x_4=\{c_{10}\}$; $x_3=\{c_7,c_8,c_9\}$; $u_4=\{(7,10),(8,10),(9,10)\}$; $z_4=\{3,9,6\}$.

Анализ четвертого шага оформим в таблице 6.

Таблица 6 – Первый этап условной оптимизации

X_3	U_4	X_4	F_4
$\underline{C_7}$	**<u>(7,10)</u>**	**$\underline{C_{10}}$**	**3**
C_8	(8,10)	C_{10}	9
C_9	(9,10)	C_{10}	6

2) Переходя ко второму этапу условной оптимизации – анализу третьего шага, запишем функциональное уравнение при i=3 (формула 8):

$$F_3(x_2,u_3)=\min_{u_3} (z_3(x_2,u_3)+F_4(x_3)), \qquad (8)$$

Анализ третьего шага рассмотрим в таблице 7.

Таблица 7 – Второй этап условной оптимизации

X_2	U_3	X_3	Z_3	F_4	Z_3+F_4	F_3
C_4	(4,7)	C_7	7	3	10	10
	(4,8)	C_8	5	9	14	-
<u>C_5</u>	**<u>(5,7)</u>**	C_7	2	3	5	**<u>5</u>**
	(5,8)	C_8	4	9	13	-
	(5,9)	C_9	8	6	14	-
C_6	(6,8)	C_8	2	9	11	11

3) Третий этап условной оптимизации – анализ второго шага – осуществляется совершенно аналогично второму этапу. Функциональное уравнение для второго шага запишется в следующей форме (формула 9), i=2.

$$F_2(x_1,u_2)=\min_{u_2}(z_2(x_1,u_2)+F_3(x_2)) \qquad (9)$$

Анализ второго шага рассмотрим в таблице 8.

Таблица 8 – Третий этап условной оптимизации

X_1	U_2	X_2	Z_2	F_3	$Z_2 + F_3$	F_2
C_2	(2,4)	C_4	4	10	14	-
	(2,5)	C_5	7	5	12	12
<u>C_3</u>	(3,4)	C_4	3	10	13	-
	<u>(3,5)</u>	**<u>C_5</u>**	1	5	6	**<u>6</u>**
	(3,6)	C_6	7	11	18	-

4) Заключительным этапом процедуры условной оптимизации является анализ первого шага. Функциональное уравнение для этого шага имеет вид (формула 10), i=1

$$F_1(x_0,u_1)=\min_{u_1}(z_1(x_0,u_1)+F_2(x_1)), \qquad (10)$$

Результаты вычислений приведены в таблице 9.

Таблица 9 – Четвертый этап условной оптимизации

X_0	U_1	X_1	Z_1	F_2	$Z_1 + F_2$	F_1
<u>C_1</u>	(1,2)	C_2	2	12	14	-
	<u>(1,3)</u>	**<u>C_3</u>**	5	6	12	**<u>11</u>**

При безусловной оптимизации остается пройти еще раз весь оптимизируемый процесс, но уже в прямом направлении, начиная с первого и кончая четвертым шагом, и «прочитать» искомое оптимальное управление, которое будет составлено из найденных ранее шаговых условно-оптимальных управлений. Таким образом, рассматривая таблицы решения с последней по первую, получаем наиболее экономный маршрут перевозки, который проходит через пункты 1, 3, 5, 7, 10 при этом транспортные расходы составляют 11 ден. ед. на единицу груза.

6.4 Задания для лабораторной работы №6

На данной сети дорог (рисунок 14) имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта 1 в пункт 10. Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза между пунктами сети. Требуется:

1) методом динамического программирования найти на сети наиболее экономный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10 и соответствующие ему затраты;

2) выписать оптимальные маршруты перевозки груза из всех остальных пунктов сети в пункт 10 и указать отвечающие им минимальные затраты на доставку.

Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi.

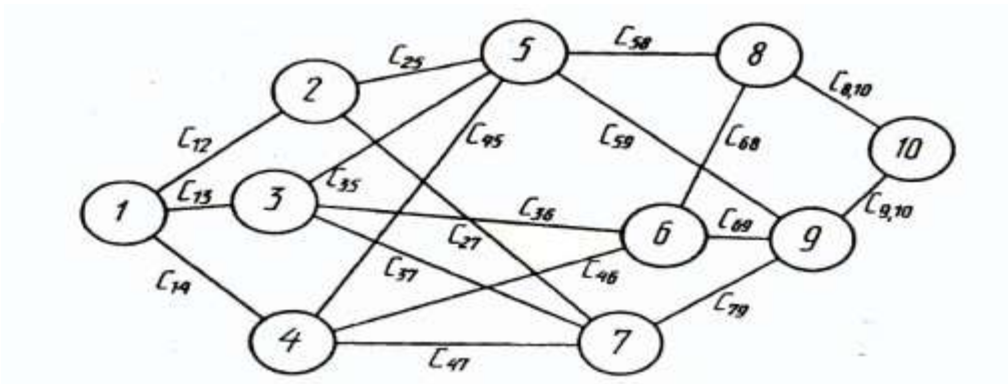

Рисунок 14 – Сеть дорог с указанными стоимостями перевозки груза

Все необходимые числовые данные вариантов №1 - №15 приведены в таблице 10.

Таблица 10- Стоимости перевозки груза

Тариф	Номер варианта														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
C_{12}	7	4	9	1	5	8	3	6	1	4	2	4	5	3	3
C_{13}	3	8	2	6	3	1	5	2	9	6	5	6	2	5	5
C_{14}	5	4	5	2	8	5	4	6	3	1	7	7	4	7	6
C_{25}	2	6	3	5	2	9	1	7	8	3	9	8	6	9	4
C_{27}	7	1	7	3	5	2	6	3	7	5	4	4	7	2	3
C_{35}	9	9	4	6	8	6	2	9	4	7	6	6	8	5	7
C_{36}	3	3	6	8	1	8	7	2	9	3	2	7	1	8	9
C_{37}	1	5	8	4	7	4	4	8	3	6	1	8	4	1	4
C_{45}	8	4	1	7	5	5	6	5	7	2	3	2	5	4	6
C_{46}	4	8	3	2	9	2	8	2	4	5	5	1	7	8	7
C_{47}	5	2	5	9	1	6	3	9	8	9	2	8	8	3	4
C_{58}	2	7	8	5	3	1	7	4	6	1	6	9	5	5	3
C_{59}	6	4	7	3	5	8	2	6	3	8	7	3	3	7	1
C_{68}	1	9	1	6	8	3	9	7	1	2	8	5	4	9	2
C_{69}	9	6	4	1	4	6	2	4	8	3	2	7	1	1	3
C_{79}	4	1	5	4	9	2	8	6	9	5	6	3	4	3	4
$C_{8,10}$	3	7	9	6	2	5	1	7	1	3	7	2	5	2	5
$C_{9,10}$	8	2	5	1	7	9	3	6	4	8	9	3	9	1	8

6.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №6

1) Что понимается под динамическим программированием?

2) Какие задачи можно решать методом динамического программирования?

3) Объяснить алгоритм решения задач динамического программирования.

4) Основное функциональное уравнение динамического программирования.

5) На какие 2 этапа распадается вычислительная процедура метода динамического программирования? В чем заключаются эти этапы?

7 Лабораторная работа 7. Решение многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации

Цель работы: Приобретение навыков решения стандартных многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации и составление программы решения задач.

7.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;

3) решить многокритериальную задачу методом аддитивной оптимизации аналитически;

4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

7.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

7.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 5

7.3.1 Многокритериальные задачи

Математические модели исследуемых явлений или процессов могут быть заданы в виде таблиц, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из сравниваемых стратегий при строго заданных внешних условиях.

Выбор оптимального решения по комплексу нескольких критериев является **задачей многокритериальной**.

Один из подходов к решению многокритериальных задач управления связан с процедурой образования обобщенной функции $F_i(a_{i1},a_{i2}, \dots a_{in})$, монотонно зависящей от критериев $a_{i1},a_{i2}, \dots a_{in}$. Данная процедура называется **процедурой (методом) свертывания критериев**. Существует несколько методов свертывания, например метод аддитивной оптимизации.

7.3.2 Метод аддитивной оптимизации

Аддитивный критерий оптимальности определяется по формуле (11).

$$F_i(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_{ij}, \; i = 1,2, \dots m, \tag{11}$$

где a_{ij} - частные критерии;

λ_j - весовые коэффициенты.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \tag{12}$$

Обобщенная функция цели (11) может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

- частные критерии количественно соизмеримы по важности;

- частные критерии являются однородными.

Если частные критерии не однородны, т.е. имеют различные единицы измерения, то в этом случае требуется нормализация критериев. Под

нормализацией критериев понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения. Рассмотрим некоторые способы нормализации.

Определим максимум и минимум каждого частного критерия, т.е.

$$a_j^+ = \max a_{ij}, i = \overline{1;m}, \tag{13}$$

$$a_j^- = \min a_{ij}, i = \overline{1;m}, \tag{14}$$

Выделим группу критериев a_j, $j = \overline{1,k}$, которые максимизируются при решении задачи, и группу критериев a_j, $j = \overline{k+1,n}$, которые минимизируются при решении задачи.

В соответствии с принципом максимальной эффективности нормализованные критерии определяются из соотношений (15), (16), (17), (18).

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{1,k}, \tag{15}$$

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{k+1,n}, \tag{16}$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, j = \overline{1,k}, \tag{17}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, j = \overline{k+1,n}, \tag{18}$$

Оптимальным будет тот вриант, который обеспечивает максимальное значение функции цели:

$$F_i(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \hat{a}_{ij}, i = \overline{1,m}, \tag{19}$$

В соответствии с принципом минимальной потери нормализованные критерии определяются соотношениями (20), (21), (22), (23).

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{1,k}, \tag{20}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \ j = \overline{k+1,n}, \qquad (21)$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \ j = \overline{1,k}, \qquad (22)$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, \ j = \overline{k+1,n}, \qquad (23)$$

При этом оптимальным будет тот вариант, который обеспечивает минимальное значение функции цели.

Пример: Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по обеспечению нового производства оборудованием. С помощью экспериментальных наблюдений были определены значения частных критериев функционирования соответствующего оборудования, выпускаемого тремя заводами-изготовителями. На основе экспертных оценок были также определены веса частных критериев. Все данные приведены в таблице 11.

Таблица 11 – Данные примера

Варианты оборудования	Частные критерии			
	Производительность, д.е.	Стоимость, д.е.	Энергоемкость, у.е.	Надежность, у.е.
Оборудование завода 1	5	7	5	6
Оборудование завода 2	3	4	7	3
Оборудование завода 3	4	6	2	4
Весовые коэффициенты	0,4	0,2	0,1	0,3

Решение:

1) Определим max каждого частного критерия:

$a_1^+ = 5, \quad a_2^+ = 7, \ a_3^+ = 7, \ a_4^+ = 6$

2) При решении задачи максимизируются первый (производительность) и четвертый (надежность) критерии, а минимизируются второй (стоимость) и третий (энергоемкость) критерии.

3) Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем критерии, используя формулы (15), (16):

$$\hat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+}, i = \overline{1,3}$$

$$\hat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1; \qquad \hat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0,6; \qquad \hat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

$$\hat{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+}, i = \overline{1,3}$$

$$\hat{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1; \qquad \hat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0,5; \qquad \hat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\hat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+}, i = \overline{1,3}$$

$$\hat{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+}, i = \overline{1,3}$$

$$\hat{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \qquad \hat{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}; \qquad \hat{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\hat{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}; \quad \hat{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \qquad \hat{a}_{33} = 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

4) Определим обобщенную функцию цели по каждому варианту, используя формулу (18).

$$F_1 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{11} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{12} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{13} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{14} = 0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot \frac{2}{7} + 0,3 \cdot 1 \approx 0,729$$

$$F_2 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{21} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{22} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{23} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{24} = 0,4 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot \frac{3}{7} + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,5 \approx 0,476$$

$$F_3 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{31} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{32} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{313} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{34} = 0,4 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot \frac{1}{7} + 0,1 \cdot \frac{5}{7} + 0,3 \cdot \frac{2}{3} \approx 0,603$$

5) Оптимальным является первый вариант оборудования, т.к. $F_{max}=F_1=0,729$.

7.4 Задания для лабораторной работы №7

Вариант № 1

Для шести проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции. Численные значения единичных показателей и соответствующие весовых коэффициентов приведены в таблице 12.

Таблица 12 – Показатели транспортных устройств

Варианты транспортных устройств	Скорости (К1)	Прочности (К2)	Перегрузки (К3)	Устойчи-вости (К4)	Металло-емкости (К5)	Мощ-ности (К6)
1	1,1	0,798	0,92	1,0	1,0	0,77
2	1,0	1,1	0,65	0,92	0,94	0,92
3	1,0	0,93	0,924	1,0	0,98	0,95
4	0,87	0,96	0,91	0,915	0,99	0,85
5	0,87	0,97	1,0	0,90	0,7	0,82
6	0,88	0,78	0,75	0,967	0,8	1,0
Коэф-ты веса	0,210	0,195	0,174	0,157	0,124	0,140

Найти оптимальное транспортное устройство.

Вариант № 2

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные представлены в таблице 13:

Таблица 13 - Локальные критерии эффективности оборудования

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производи-тельность, д. е.	стоимость оборудования, д. е.	объем памяти у. е.	надежность, у. е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
Коэффици-енты веса	0,25	0,20	0,32	0,23

Вариант № 3

Для пяти проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и коэффициенты весомости единичных показателей. Численные значения единичных показателей и коэффициентов весомости приведены в таблице 14.

Таблица 14 – Показатели технических систем

Варианты технических систем	Относительные единичные показатели					
	слож-ности	веса	времени подго-товки	автома-тизации	мощно-сти	унифика-ции
I	1,0	0,88	1,0	1,0	0,72	0,614
I I	0,72	1,2	0,8	0,78	0,81	0,420
III	0,658	0,358	0,765	0,782	0,525	0,915
IV	0,425	0,97	0,755	0,70	0,98	0,31
V	0,467	0,555	0,865	0,705	0,865	0,650
Коэффици-енты веса	0,157	0,124	0,210	0,195	0,174	0,140

Найти оптимальную техническую систему.

Вариант № 4

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в таблице 15.

Таблица 15 - Показатели качества двигателей

Варианты двигателей	Показатели качества		
	мощность, л. с.	крутящий момент, кгс • м	масса, кг
1	180	67	850
2	176	70	1000
3	176	68	860
4	181	67	820
5	177	68	860
6	180	66	800
Коэффициенты	0,4	0,24	0,36

Найдите оптимальный вариант двигателя.

Вариант №5

Показатели эффективности работы предприятий приведены в таблице 16.

Таблица 16 – Показатели эффективности работы предприятий

№ пред-приятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	прибыль, д. е.	себестоимость единицы продукции, д. е.	доходы, д. е.	фондоотдача, у. е.	произво-дительность, у. е.
1	30.0	40,0	20,0	0,2	300
II	25,0	20,0	30,0	0,3	200
III	40,0	45,0	54,0	0,1	250
IV	28,0	30,0	35,0	0,4	160
V	15,0	12,0	20,0	0,25	280
VI	50,0	30,0	40,0	0,21	120
Весовые коэффи-циенты	0,32	0,23	0,15	0,20	0,10

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант № 6

Для пяти проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции. Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в таблице 17.

Таблица 17 - Показатели транспортных устройств

Варианты транспортных устройств	Скорости (К1)	Проч ности (К2)	Перег рузки (К3)	Устой чивости (К4)	Мощ ности (К6)
1	0,78	0,98	0,72	1,0	0,87
2	1,0	1,0	0,65	0,9	0,94
3	0,90	0,93	0,92	1,0	0,96
4	0,87	0,95	0,81	0,91	0,85
5	0,87	0,97	1,3	0,90	0,82
Коэф-ты веса	0,310	0,190	0,173	0,147	0,18

Найти оптимальное транспортное устройство.

Вариант № 7

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования.

Исходные данные представлены в таблице 18.

Таблица 18 - Локальные критерии эффективности оборудования

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования д. е.	объем памяти у. е.	надежность, у. е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
V	130	5	7	7
Коэффициенты веса	0,20	0,25	0,23	0,32

Вариант № 8

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в таблице 19.

Таблица 19 - Показатели качества двигателей

Варианты двигателей	Показатели качества		
	мощность, л. с.	крутящий момент, кгс • м	масса, кг
1	183	71	855
2	186	72	900
3	172	69	840
4	181	66	830
5	175	68	860
6	180	66	800
7	175	67	1000
Коэффициенты	0,26	0,40	0,34

Найдите оптимальный вариант двигателя.

Вариант № 9

Показатели эффективности работы предприятий приведены в таблице 20.

Таблица 20 - Показатели эффективности работы предприятий

№ пред-приятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	прибыль, д. е.	себестои-мость единицы продукции, д. е.	доходы, д. е.	фондоотдача, у. е.	произво-дительность, у. е.
I	32,0	43,0	30,0	0,1	200
II	27,0	25,0	40,0	0,4	300
III	30,0	40,0	44,0	0,3	260
IV	28,0	37,0	37,0	0,25	280
V	17,0	22,0	35,0	0,25	250
Весовые коэффи-циенты	0,22	0,33	0,15	0,25	0,10

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант № 10

Для семи проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции. Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в таблице 21.

Таблица 21 – Показатели транспортных устройств

Варианты транспортных устройств	Скоро сти (К1)	Проч ности (К2)	Перег рузки (К3)	Мощ ност (К6)
1	0,89	0,78	0,82	0,77
2	1,2	1,0	0,65	0,94
3	1,0	0,94	0,92	0,95
4	0,97	0,95	0,91	0,85
5	0,87	0,97	1,0	0,86
6	0,98	0,88	0,85	1,0
Коэф-ты веса	0,220	0,185	0,165	0,430

Найти оптимальное транспортное устройство.

Вариант № 11

Показатели эффективности работы предприятий приведены в таблице 22.

Таблица 22 – Показатели эффективности работы предприятий

№ пред-приятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	прибыль, д. е.	себестоимость единицы продукции, д. е.	доходы, д. е.	фондоотдача, у. е.	произво-дительность, у. е.
1	40,0	43,0	26,0	0,4	200
II	35,0	23,0	40,0	0,35	300
III	45,0	42,0	56,0	0,15	260
IV	38,0	35,0	45.0	0,2	180
V	25,0	22,0	26,0	0,24	260
Весовые коэффи-циенты	0,23	0,33	0,14	0,10	0,20

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант № 12

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в таблице 23.

Таблица 23 - Показатели качества двигателей

Варианты двигателей	Показатели качества			
	мощность, л. с.	прочность	Крутящий момент, кгс • м	масса, кг
1	170	0,92	67	950
2	186	0,95	70	1000
3	176	0.96	68	960
4	183	0,89	67	920
5	187	0,93	68	960
6	180	0.90	66	800
7	175	0,89	69	900
Коэффициенты веса	0,34	0,16	0,24	0,26

Найдите оптимальный вариант двигателя.

Вариант № 13

Для пяти проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и коэффициенты весомости единичных показателей. Численные значения единичных показателей и коэффициентов весомости приведены в таблице 24

Таблица 24 – Показатели технических систем

Варианты технических систем	Сложность	Веса	Время подготовки	Автоматизация	Мощность
I	0,540	0,88	1,0	0,80	0,82
II	0,620	1,0	0,9	0,88	0,81
III	0,558	0,558	0,965	0,82	0,65
IV	0,525	0,97	0,855	0,70	0,98
V	0,567	0,565	0,865	0,75	0,86
Коэффициенты веса	0,177	0,124	0,240	0,295	0,164

Найти оптимальную техническую систему.

Вариант № 14

Для четырех проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и коэффициенты весомости единичных показателей. Численные значения единичных показателей и коэффициентов весомости приведены в таблице 25.

Таблица 25 - Показатели технических систем

Варианты технических систем	Относительные единичные показатели					
	Сложность	Веса	Время подготовки	Автоматизация	Мощность	Унификация
I	0,8	0,98	1,0	1,0	0,72	0,614
iI	0,82	1,0	0,78	0,78	0,82	0,620
III	0,65	0,88	0,76	0,78	0,625	0,915
IV	0,56	0,97	0,75	0,70	0,98	0,71
Коэффициенты веса	0,124	0,157	0,210	0,174	0,195	0,140

Найти оптимальную техническую систему.

Вариант № 15

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные представлены
в таблице 26.

Таблица 26 - Локальные критерии эффективности оборудования

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования д. е.	объем памяти у. е.	надежность, у. е.
I	200	6	6	7
II	170	6	8	5
III	120	5	6,5	6
IV	220	7	7	6
V	150	4	7	7
VI	170	4	6	5
Коэффициенты	0,32	0,25	0,23	0,20

7.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №7

1) Математическая модель задач принятия решений в условиях определенности.

2) Какие задачи называются многокритериальными?

3) Какие существуют методы свертывания критериев в многокритериальных задачах?

4) В чем заключается метод аддитивной оптимизации?

5) Что такое весовой коэффициент?

6) Как определяется обобщенная функция цели в методе аддитивной оптимизации?

7) В чем заключается алгоритм нормализации критериев?

8 Лабораторная работа №8. Нахождение оптимального решения в условиях неопределенности

Цель работы: Приобретение навыков нахождения оптимального решения в условиях неопределенности методами Вальда и Сэвиджа и составление программы решения задач.

8.1 Ход работы:

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;

3) найти оптимальное решение в условиях неопределенности, используя критерии Вальда и Сэвиджа;

4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

8.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;
2) цель работы;
3) формулировку задания;
4) аналитическое решение задачи своего варианта;
5) электронный отчет решения задачи;
7) программный код решения задачи;
8) вывод о проделанной работе.

8.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №8

8.3.1 Принятие решения в условиях неопределенности

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям (управленческим решениям) R_j, а столбцы – возможным состояниям «природы» S_i, где происходит реализация действий.

Каждому R_j-му действию и каждому возможному S_i-му состоянию «природы» соответствует результат (исход) – V_{ij}. (таблица 27).

Таблица 27 – Матрица возможных результатов

	S_1	S_2	...	S_i		S_n
R_1	V_{11}	V_{12}		V_{1i}		V_{1n}
R_2	V_{21}	V_{22}		V_{2i}		V_{2n}
…						
R_j	V_{j1}	V_{j2}		V_{ji}		V_{jn}
…						
R_m	V_{m1}	V_{m2}		V_{mi}		V_{mn}

Следовательно, математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний $\{S_i\}$, множеством планов (стратегий) $\{R_j\}$ и матрицей возможных результатов $\|V_{ji}\|$.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них.

8.3.2 Критерий Вальда

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решения, то при выборе оптимальной стратегии используется **минимаксный критерий**. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max\limits_i \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j, которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов:

$$W = \min_j \max_i \{V_{ji}\}, \tag{24}$$

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет выигрыш лица, принимающего решения, то при выборе оптимальной стратегии используется **максиминный критерий**. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наименьший элемент $\min\limits_j \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j, которому будет соответствовать наибольший элемент из этих наименьших элементов:

$$W = \max_j \min_i \{V_{ji}\}, \tag{25}$$

8.3.3 Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа использует матрицу рисков $\|r_{ji}\|$. Элементы данной матрицы можно определить по формуле (26).

$$r_{ji} = \begin{cases} \max\limits_j \{V_{ji}\} - V_{ji}, \textit{если } V - \text{выигрыш} \\ V_{ji} - \min\{V_{ji}\}, \textit{если } \text{V - потери} \end{cases}, \tag{26}$$

Независимо от того, является ли V_{ji} выигрышами или потерями, r_{ji} в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающего решения. Следовательно, можно применять к r_{ji} только минимаксный критерий

(формула 24).

Пример: Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия. В таблице 28 приведены возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей. Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Таблица 28 – Затраты на провозные возможности предприятия

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Решение: Согласно условию задачи, имеются четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы»: S_1, S_2, S_3, S_4. Известны также четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия: R_1, R_2, R_3, R_4.

1) Используя критерий Вальда, найдем оптимальный вариант провозных возможностей. Необходимые результаты приведены в таблице 29.

Таблица 29 – Применение критерия Вальда

R_j \ S_i	Затраты, д.е.				$\max\{V_{ji}\}$	W=min $\max\{V_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	6	12	20	24	24	-
R_2	12	7	9	28	28	-
R_3	23	18	15	23	23	23
R_4	27	24	21	27	27	-

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» будет третья, т.е. R_3.

3) Вычислим элементы матрицы рисков по формуле (26) (рисунок 15):

$\| r_{ji} \| =$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	5	11	9
R_2	3	0	0	13
R_3	17	11	6	4
R_4	21	17	12	0

Рисунок 15 – Матрица рисков

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа оформим в таблице 30.

Таблица 30 – Применение критерия Сэвиджа

R_j \ S_i	Величина риска, д.е.				$\max\{r_{ji}\}$	W=min $\max\{r_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	5	11	9	11	11
R_2	3	0	0	13	13	-
R_3	17	11	6	4	17	-
R_4	21	17	12	0	21	-

Введение величины риска привело к выбору первой стратегии R_1, обеспечивающей наименьшие потери в самой неблагоприятной ситуации.

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большого проигрыша.

8.4 Задания для лабораторной работы №8

Вариант № 1

При выборе стратегии R_j (j=1,3) каждому возможному состоянию природы S_i (i=1,4) соответствует один результат (исход) V_{ji} (j=1,4; i=1,3). Элементы V_{ji} являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в таблице 31:

Таблица 31 – Меры потерь при принятии решения

Стратегии	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	2	6	5	8
R_2	3	9	1	4
R_3	5	1	6	2

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа.

Вариант № 2

Фирма рассматривает вопрос о строительстве станции технического обслуживания (СТО) автомобилей. Составлена смета расходов на строительство станции с различным количеством обслуживаемых автомобилей, а также рассчитан ожидаемый доход в зависимости от удовлетворения прогнозируемого спроса на предлагаемые услуги СТО (прогнозируемое количество обслуженных автомобилей в действительности). В зависимости от принятого решения – проектного количества обслуживаемых автомобилей в сутки (проект СТО) Rj и величины прогнозируемого спроса на услуги СТО – построена таблица 32 ежегодных финансовых результатов (доход, д.е.).

Таблица 32 – Прогнозируемые величины удовлетворяемого спроса

Проекты СТО	Прогнозируемая величина спроса					
	0	10	20	30	40	50
20	-120	60	240	250	250	250
30	-160	15	190	380	390	390
40	-210	-30	150	330	500	500

Определить наилучший проект СТО с использованием критериев Вальда и Сэвиджа.

Вариант № 3

Дана платежная матрица (матрица доходов) (рисунок 16).

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
R1	15	12	1	-3	18	20
R2	2	15	9	7	1	3
R3	0	6	15	21	-2	5
R4	8	20	12	3	0	4

Рисунок 16 – Матрица доходов

Определите оптимальную стратегию R_i, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Сравните полученные решения.

Вариант № 4

Один из пяти станков должен быть выбран для изготовления партии изделий, размер которой Q может принимать три значения: 150; 200; 350. Производственные затраты C_i, для i станка задаются формулой (26):

$$C_i=P_i+c_i\cdot Q, \tag{26}$$

где данные P_i и c_i приведены в таблице 33.

Таблица 33 – Данные P_i и c_i

Показатели	Модель станка				
	1	2	3	4	5
P_i	30	80	50	160	100
c_i	14	6	10	5	4

Решите задачу, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Полученные решения сравните.

Вариант № 5

Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля Rj(j=1,4). Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_i(i=1,3) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 34 (д. е.).

Таблица 34 - Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	24	10
R_3	15	28	12
R_4	9	30	20

Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 6

Определите тип электростанции, которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий. Множество возможных стратегий в задаче включает следующие параметры:

R1 – сооружается гидростанция;

R2 – сооружается теплостанция;

R3 – сооружается атомная станция.

Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы $S_i(i = 1,5)$. Результаты расчета экономической эффективности приведены в таблице 35:

Таблица 35 - Значения экономической эффективности

Тип станции	Состояние природы				
	S1	S2	S3	S4	S5
R1	40	70	30	25	45
R2	60	50	45	20	30
R3	50	30	40	35	60

Решите задачу, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Сравните решения и сделайте вывод.

Вариант №7

Дана платежная матрица (матрица расходов) (рисунок 17):

	S1	S2	S3	S4	S5
R1	1	2	11	-3	18
R2	26	-5	19	-7	16
R3	10	16	25	28	-2
R4	18	27	12	3	20
R5	5	6	8	9	3

Рисунок 17 – Матрица расходов

Определите оптимальную стратегию R_i, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Сравните полученные решения.

Вариант № 8

Намечается строительство торгового комплекса. Имеются пять проектов строительства Rj(j=1,5). Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков S_i(i=1,4) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 36 (д. е.).

Таблица 36 - Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	41	2	34	25
R_2	32	2	28	16
R_3	23	5	30	17
R_4	15	4	44	20
R_5	34	2	24	19

Требуется выбрать лучший проект строительства, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 9

При выборе стратегии R_j (j=1,4) каждому возможному состоянию природы S_i (i=1,4) соответствует один результат (исход) V_{ji} (j=1,4; i=1,4). Элементы V_{ji} являющиеся мерой прибыли при принятии решения, приведены в таблице 37.

Таблица 37 – Меры прибыли при принятии решения

Стратегии	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	6	1	7	4
R_2	7	9	1	5
R_3	8	2	6	2
R_4	9	5	2	3

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа.

Вариант № 10

При выборе стратегии R_j (j=1,3) каждому возможному состоянию природы S_i (i=1,5) соответствует один результат (исход) V_{ji} (j=1,5; i=1,3). Элементы V_{ji} являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в таблице 38.

Таблица 38 – Меры потерь при принятии решения

Стратегии	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	6	5	4	8	7
R_2	4	8	9	2	1
R_3	5	3	1	6	2

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа.

Вариант № 11

Дана платежная матрица (матрица доходов) (рисунок 18):

	S1	S2	S3	S4
R1	25	22	11	-1
R2	2	16	19	7
R3	10	-6	15	23
R4	8	25	14	3
R5	13	5	34	2
R6	-2	4	8	10

Рисунок 18 – Матрица доходов

Определите оптимальную стратегию R_i, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Сравните полученные решения.

Вариант № 12

Рассматривается крупномасштабное производство автомобилей. Имеются три варианта проекта автомобиля Rj(j=1,3). Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков S_i(i=1,4) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 39 (д. е.).

Таблица 39 – Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	30	21	45	25
R_2	45	24	24	14
R_3	53	35	38	15

Требуется выбрать лучший проект автомобиля для производства, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 13

Имеются пять вариантов проекта технических систем Rj(j=1,5). Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков S_i(i=1,4) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 40 (д. е.).

Таблица 40 – Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	20	26	47	35
R_2	55	23	34	43
R_3	33	35	43	32
R_4	40	24	24	14
R_5	34	36	38	15

Требуется выбрать лучший проект технической системы, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 14

Имеются пять проектов строительства Rj(j=1,5) детского сада. Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_i(i=1,3) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 41 (д. е.).

Таблица 41 – Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	35	23	24
R_2	23	24	34
R_3	45	25	25
R_4	26	41	27

Требуется выбрать лучший проект строительства детского сада, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 15

При выборе стратегии R_j (j=1,3) каждому возможному состоянию природы S_i (i=1,5) соответствует один результат (исход) V_{ji} (j=1,5; i=1,3). Элементы V_{ji} являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в таблице 42.

Таблица 42 – Меры потерь при принятии решения

Стратегии	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	7	4	9	8	3
R_2	8	6	9	5	1
R_3	9	3	8	6	2

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа.

8.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №8

1) Что понимается под понятием неопределенность?

2) Математическая модель задач принятия решений в условиях неопределенности?

3) Что понимается под понятием риск?

4) Как определяется матрица рисков?

5) Раскройте суть критерия Вальда?

6) Каковы преимущества и недостатки критерия Сэвиджа?

9 Лабораторная работа №9. Построение игровых моделей

Цель работы: Приобретение навыков построения игровых моделей и составление программы решения задач.

9.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;

3) по заданной платежной матрице найти верхнюю и нижнюю границы, наличие седловой точки матричной игры и стратегии игроков.

4) построить модель индивидуальной задачи. Провести эксперименты ситуаций.

5) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

6) оформить отчет по лабораторной работе;

7) защитить лабораторную работу.

9.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

9.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 6

9.3.1 Основные понятия теории игр

Теория, занимающаяся принятием решения в условиях конфликтных ситуаций, называется **теорией игр**. Математическая модель конфликтной ситуации представляет собой игру.

Игра – это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации. Эти правила устанавливают:

- выбор образа действия игроков на каждом этапе игры;

- информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;

- плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

В зависимости от числа конфликтующих сторон игры делятся на парные и множественные.

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре. Игра называется **игрой с нулевой**

суммой, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, в противном случае она называется **игрой с ненулевой суммой**.

Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий.

Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям, а ее элементы - выигрышам одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется **платежной матрицей** или **матрицей игры**.

9.3.2 Парная игра с нулевой суммой в чистых стратегиях

Пусть заданы множество стратегий: для первого игрока $\{A_i\}$, для второго игрока $\{B_j\}$, платежная матрица $A_{mxn}=||a_{ij}||$, где a_{ij} – выигрыш первого игрока или проигрыш второго игрока при выборе ими стратегий A_i и B_j соответственно. Каждый из игроков выбирает однозначно с вероятностью 1 некоторую стратегию, т.е. пользуется при выборе решения **чистой стратегией**. Поскольку интересы игроков противоположны, то первый игрок стремиться максимизировать свой выигрыш, а второй игрок , наоборот, минимизировать свой проигрыш.

Решение игры состоит в определении наилучшей стратегии каждым игроком. Решение игры двух лиц с нулевой суммой использует критерий **мини-макса-максимина**.

Если первый игрок применяет стратегию A_i, то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии B_j свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума находиться по формуле (27).

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \mathrm{i} = \overline{1; \mathrm{m}}, \qquad (27)$$

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться наитии такую стратегию, при которой α_i обращается в максимум:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}, \mathrm{i} = \overline{1; \mathrm{m}}, \ \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}, \qquad (28)$$

Величина α называется **нижней ценой игры**. Придерживаясь ее, первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α. Другими словами, нижняя цена игры является гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока.

Аналогично определим по каждому столбцу матрицы:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \ \mathrm{j} = \overline{1; \mathrm{n}}, \qquad (29)$$

Найдем минимальное значение β_j:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}, \mathrm{i} = \overline{1; \mathrm{m}}, \ \mathrm{j} = \overline{1; \mathrm{n}}, \qquad (30)$$

Величина β называется **верхней ценой игры**, которая представляет собой гарантированный проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Замечание: Для любой матрицы A=||a_{ij}|| выполняется неравенство $\beta \geq \alpha$

Если $\beta = \alpha$, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет седловую точку. Эта точка есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии. Оптимальность здесь означает, что ни один игрок не стремиться изменить свою стратегию, т.к. его противник может на это ответить другой стратегией, дающей худший для первого игрока результат.

Величина $C = \beta = \alpha$ называется **ценой игры**. Она определяет средний выигрыш игрока А и средний проигрыш В при использовании ими оптимальных стратегий.

Пример: Дана платежная матрица, которая определяет выигрыши игрока А. Вычислить нижнюю и верхнюю цены заданной игры.

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 20 \\ 6 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Решение: Представим нашу игру в виде таблицы 43.

Таблица 43 – Решение матричной игры примера

Стратегии 1-го игрока	Стратегии 2-го игрока				α_i	α
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	10	4	11	7	4	-
A_2	7	6	8	20	6	6
A_3	6	2	1	11	1	-
β_j	10	6	11	20		
β	-	6	-	-		

Игрок А выбирает стратегию A_2, которая является его гарантированным выигрышем при любых стратегиях игрока В. α =6 д.е. – нижняя цена игры.

Игрок В выбирает стратегию B_2, которая минимизирует его максимальные проигрыши. Величина β = 6 д.е – верхняя цена игры, которая является гарантированным проигрышем игрока В при любых стратегиях игрока А. Так как $\beta = \alpha$, то седловая точка с = 6 д.е.

Пример: Каждый из игроков А и В записывает одно из чисел 1,4,6 или 9, затем они одновременно показывают написанное. Если оба числа оказались одинаковой четности, то игрок А выигрывает столько очков, какова сумма этих чисел, если разной четности – выигрывает игрок В. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Решение: Чистыми стратегиями игрока А будут: A_1 – записать число 1, A_2 – записать число 4, A_3 – записать число 6, A_4 – записать число 9. У игрока В чистыми будут аналогичные стратегии (таблица 44).

Таблица 44 – Платежная матрица примера

Стратегии 1-го игрока	Стратегии 2-го игрока				α_i	α
	$B_1(1)$	$B_2(4)$	$B_3(6)$	$B_4(9)$		
$A_1(1)$	2	-5	-7	10	-7	-7
$A_2(4)$	-5	8	10	-13	-13	-
$A_3(6)$	-7	10	12	-15	-15	-
$A_4(9)$	10	-13	-15	18	-15	-
β_j	10	10	12	18		
β	10	10	-	-		

Элемент a_{11}=2, т.к. в ситуации (A_1,B_1) оба игрока записывают нечетное число 1 и выигрыш игрока А равен 1+1=2. Элемент a_{12}=-5, т.к. в ситуации (A_1,B_2) игрок А записывает число 1, а игрок В – число 4, т.е. числа разной четности, поэтому выигрыш игрока В равен 5, тогда как выигрыш игрока А составит -5. Аналогичным образом вычисляются остальные элементы платежной матрицы. После определения α_i и β_j замечаем, что нижняя цена игры $\alpha = \max_i \alpha_i = -7$ не равна верхней цене игры $\beta = \min_j \beta_j = 10$, поэтому данная игра не имеет седловую точку. Максиминной для игрока А будет чистая стратегия A_1. Пользуясь ей, игрок А выигрывает не менее -7 очков (проигрывает не более 7). Минимаксными для игрока В будут чистые стратегии B_1 и B_2, при которых он проигрывает не более 10 очков.

9.4 Задания для лабораторной работы №9

Задание 1

Даны платежные матрицы. Определить цены игры, наличие седловой точки и стратегии игроков, согласно своего варианта.

1)
$$\begin{matrix} 8 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 9 & 7 & 9 \end{matrix}$$

3)
$$\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{matrix}$$

2)

1	7	2
4	3	1
3	1	1
0	3	1

4)

2	3	6	5
1	-2	7	3
5	4	3	0

5)

-5	0	4	2
7	5	4	9
6	8	-1	0

6)

3	3	5	8	10
4	5	5	2	2
3	3	5	7	3

7)

2	1	2	4	5
1	4	1	3	2
3	0	1	0	2

8)

1	3	-4	2
-1	4	8	1
6	-1	2	10

9)

5	2	1	3
6	3	2	2
2	4	0	-3

10)

2	1	3	0
2	4	-1	5
5	7	-4	3

11)

7	9	7	5	6	12
9	10	6	5	8	9
8	-5	2	3	1	4

12)

2	4	1	5
1	-1	3	2
5	2	-4	0
2	5	5	4

13)

-3	2	3
6	-5	2
3	0	5
2	-1	4

14)

3	4	2	1
5	2	0	3
7	4	3	5
-2	-3	5	2
0	3	1	4

15)

9	9	2	1
0	3	5	4
4	5	7	8
5	1	3	9

Задание 2. Построить модель индивидуальной задачи. Провести эксперименты ситуаций.

Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

Вариант № 1

Игроки A и B записывают цифры 1 и 2. Игра состоит в том, что кроме цифры 1 или 2 каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью; если же угадал только один, то он получает столько очков, какова сумма записанных им цифр. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 2

Игрок А может записать одну из цифр: 2, 4 либо 7; игрок В может записать 1, 3, 4 либо 8. Если обе цифры окажутся одинаковой четности, то игрок А получает столько очков, какова сумма записанных цифр; если разной четности – то очки достаются игроку В. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 3

Участники парной игры независимо друг от друга могут записать одну из цифр: 3, 5 или 8. Если разность между цифрами, записанными игроками А и В, окажется положительной, то игрок А выигрывает столько очков, какова получившаяся разность; если разность будет отрицательной, то соответствующее количество очков выигрывает игрок В; если же разность окажется равной нулю, то и выигрыш игроков будет равен нулю. Составить платежную матрицу, найти максимин и минимакс.

Вариант № 4

Каждый из игроков А и В может показать один или два пальца. Если число одновременно показанных пальцев у обоих игроков одинаково, то игрок А получает одно очко; если же число пальцев разное, то очко получает игрок В. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.

Вариант № 5

Два игрока бросают по две игровые кости. Сумма очков, выпавших на двух игровых костях, накапливается. Игра прекращается, когда один из игроков достигает суммы 101. Игра повторяется до трех побед. На игровой кости 6 граней с количеством точек от 1 до 6. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.

Вариант № 6

Игроки A и B записывают цифры 2 и 4. Игра состоит в том, что кроме цифры 2 или 4 каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью; если же угадал только один, то он получает столько очков, каково произведение записанных им цифр. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 7

Игрок A может записать одну из цифр: 1, 2 либо 3; игрок B может записать 4, 5, 6 либо 7. Если обе цифры окажутся одинаковой четности, то игрок A получает столько очков, какова сумма записанных цифр; если разной четности — то очки достаются игроку B. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 8

Игрок A может записать одну из цифр: 2, 4 либо 6; игрок B может записать 1, 3 либо 5. Если обе цифры окажутся разной четности, то игрок A получает столько очков, каково произведение записанных цифр; если одной четности – то очки достаются игроку B. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 9

Участники парной игры независимо друг от друга могут записать одну из цифр: 9, 5 или 3. Если разность между цифрами, записанными игроками А и В, окажется отрицательной, то игрок А проигрывает столько очков, какова получившаяся разность; если разность будет положительной, то соответствующее количество очков проигрывает игрок В; если же разность окажется равной нулю, то и выигрыш игроков будет равен нулю. Составить платежную матрицу, найти максимин и минимакс.

Вариант № 10

Игра «Камень, ножницы, бумага». Два игрока показывают одновременно одно из трех предметов: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. В соответствии с победой игроку присуждается очко. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.

9.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №9

1) Что называется теорией игр?

2) Что понимается под стратегией игры?

3) Какие игры называются играми с нулевой суммой; с ненулевой суммой?

4) Раскройте понятие конечной и бесконечной игры?

5) Что такое платежная матрица?

6) Раскройте понятие седловой точки.

7) Что называется нижней ценой игры, верхней ценой игры? Как они определяются?

8) Укажите суть игры со смешанными стратегиями?

10 Лабораторная работа №10. Нахождение характеристик простейших систем массового обслуживания (СМО)

Цель работы: Приобретение навыков нахождения характеристик СМО и составление программы решения задач.

10.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;

3) определить вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы данной задачи;

4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

10.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

10.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №10

10.3.1 Одноканальные модели систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО) – это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

1) Одноканальная СМО с отказами

Представим данную систему массового обслуживания в виде графа (рисунок 15), у которого имеются два состояния:

S_0 – канал свободен (ожидание);

S_1 – канал занят (идет обслуживание заявки).

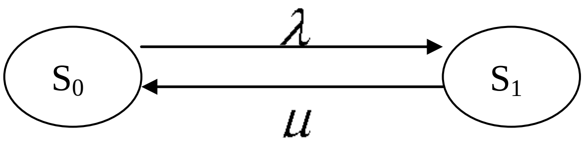

Рисунок 15 – Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Обозначим вероятности состояний:

$P_0(t)$ – вероятность состояния «канал свободен»;

$P_1(t)$ – вероятность состояния «канал занят».

По размеченному графу состояний (рисунок 8) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t) \end{cases}, \qquad (31)$$

где λ - интенсивность поступления заявок в систему;

μ - интенсивность обслуживания.

Решением данной системы называется неустановившимся, поскольку оно непосредственно зависит от t и выглядит следующим образом:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \quad , \qquad (32)$$
$$P_1(t) = 1 - P_0(t)$$

Характеристики одноканальной СМО с отказами

1) Относительная пропускная способность:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad (33)$$

2) Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q, \qquad (34)$$

3) Вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_1 = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \qquad (35)$$

Величина $P_{отк}$ может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

Пример: Пусть одноканальное СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка – автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ=1 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания – 1,8 часа. Найти основные характеристики системы.

Решение:

1) Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555.$$

2) Вычислим относительную пропускную способность, используя формулу (33):

$$q = \frac{0{,}555}{1+0{,}555} = 0{,}356.$$

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 36% прибывших на пост автомобилей.

3) Абсолютную пропускную способность определим по формуле (34):

$$A = 1 \cdot 0{,}356 = 0{,}356$$

Это означает, что система способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

4) Вероятность отказа (формула 35):

$$P_{отк} = 1 - q = 1 - 0{,}356 = 0{,}644$$

Это означает, что около 64% прибывших автомобилей на пост получат отказ в обслуживании.

2) Одноканальное СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди

Граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рисунке 19.

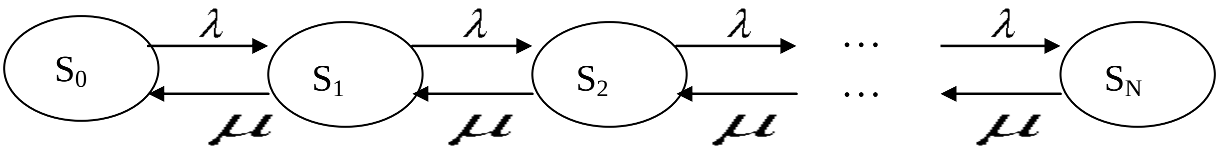

Рисунок 19 – Граф состояний одноканальной СМО с ожиданием

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 – «канал свободен»;

S_1 – «канал занят» (очереди нет);

S_2 – «канал занят» (одна заявка стоит в очереди);

……………………

S_N – «канал занят» (N-1 заявок стоит в очереди).

Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\rho \cdot P_0 + P_1 = 0, \quad \mathrm{n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -(1-\rho)\cdot P_n + P_{n+1} + \rho \cdot P_{n-1} = 0, \quad 0 < \mathrm{n} < \mathrm{N} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\mathrm{P_N} + \rho \cdot P_{N-1} = 0, \quad \mathrm{n} = \mathrm{N}, \end{cases} \tag{36}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Решение системы уравнений (37) имеет вид:

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\cdot \rho^n, \ \rho \neq 1, \ \mathrm{n} = \overline{1;\mathrm{N}} \\ \dfrac{1}{\mathrm{N}+1}, \ \rho = 1; \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}. \tag{37}$$

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (N-1):

1) Вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{отк} = \begin{cases} P_0 \cdot \rho^N, \ \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{\mathrm{N}+1}, \ \rho = 1; \end{cases} \tag{38}$$

2) Относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{отк}, \tag{39}$$

3) Абсолютная пропускная способность (формула 34)

4) Среднее число находящихся в системе заявок:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho\cdot(1-(N+1)\cdot\rho^N + N\cdot\rho^{N+1})}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{N+1})}, \ \rho \neq 1 \\ \dfrac{\mathrm{N}}{2}, \quad \rho = 1 \end{cases} \tag{40}$$

5) Среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)}, \tag{41}$$

6) Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}, \tag{42}$$

7) Среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda(1 - P_N)W_q, \tag{43}$$

Пример: Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведение диагностики, ограничено и равно 3 (N-1=3). Если все стоянки заняты, т.е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на стоянку, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывший на диагностику, имеет интенсивность λ=0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля в среднем равно 1,05 часа.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Решение:

1) Параметр потока обслуживаний автомобилей:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}952.$$

2) Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивности λ и μ, т.е.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}85}{0{,}952} = 0{,}893.$$

3) Вычислим финальные вероятности системы:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-0{,}893}{1-0{,}893^5} \approx 0{,}248$$

$$P_1 = \rho \cdot P_0 = 0{,}893 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}221$$

$$P_2 = \rho^2 \cdot P_0 = 0{,}893^2 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}198$$

$$P_3 = \rho^3 \cdot P_0 = 0{,}893^3 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}177$$

$$P_4 = \rho^4 \cdot P_0 = 0{,}893^4 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}158$$

4) Вероятность отказа в обслуживании автомобиля:

$$P_{отк} = P_4 \approx 0{,}158$$

5) Относительная пропускная способность поста диагностики:

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}158 = 0{,}842$$

6) Абсолютная пропускная способность поста диагностики:

$A = \lambda \cdot q = 0{,}85 \cdot 0{,}842 = 0{,}716$ (автомобиля в час)

7) Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и в очереди (формула 40):

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 = 1 \cdot 0{,}221 + 2 \cdot 0{,}198 + 3 \cdot 0{,}177 + 4 \cdot 0{,}158 = 1{,}77$$

8) Среднее время пребывания автомобиля в системе (по формуле 41):

$W_s = \dfrac{1{,}77}{0{,}85 \cdot 0{,}842} \approx 2{,}473$ часа

9) Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди на обслуживание (по формуле 42):

$W_q = 2{,}473 - 1{,}05 = 1{,}423$ часа

10) Среднее число автомобилей в очереди:

$L_q = 0{,}85 \cdot 0{,}842 \cdot 1{,}423 = 1{,}02$

Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, т.к. пост диагностики не обслуживает автомобили в среднем в 16% случаев ($P_{отк} = 0{,}158$).

3) Одноканальное СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди

Система алгебраических уравнений, описывающих работу СМО при t→∞ для любого n=0, 1, 2, …, имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 = 0, n = 0 \\ \lambda \cdot P_{n-1} + \mu \cdot P_{n+1} - (\lambda + \mu) \cdot P_n = 0, n > 0. \end{cases} \quad (44)$$

Решением данной системы уравнений имеет вид:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n, n = 0,1,2,...., \quad (45)$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди:

1) Среднее число находящихся в системе заявок на обслуживание:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \frac{\rho}{1-\rho}, \tag{46}$$

2) Средняя продолжительность пребывания заявки в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}, \tag{47}$$

3) Среднее число заявок в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \tag{48}$$

4) Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \tag{49}$$

Пример: Рассмотрим пример 10, где речь шла о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывших на обслуживание автомобилей, т.е. длина очереди не ограничена.

Требуется определить значения вероятностных характеристик.

Решение:

1) Параметр потока обслуживания μ и приведенная интенсивность потока автомобилей ρ определены в примере 10:

$\mu = 0{,}952$; $\rho = 0{,}893$.

2) Вычислим предельные вероятности системы по формуле (45):

$P_0 = 1 - 0{,}893 = 0{,}107$

$P_1 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893 = 0{,}096$

$P_2 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^2 = 0{,}085$

$P_3 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^3 = 0{,}076$

$P_4 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^4 = 0{,}068$

$P_5 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^5 = 0{,}061$ и тт.д

Следует отметить, что P_0 определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает). В нашем примере она составляет 10,7% т.к. P_0=0,107.

3) Среднее число автомобилей, находящихся в системе:

$L_s = \frac{0,893}{1-0,893} = 8,346$ ед;

4) Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$W_s = \frac{8,346}{0,85} = 9,817$ час.

5) Среднее число автомобилей в очереди на обслуживании:

$L_q = L_s - \rho = 8,346 - 0,893 = 7,453$.

6) Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди:

$W_q = \frac{7,453}{0,85} = 8,766$ час.

8.3.2 Многоканальные модели систем массового обслуживания

1) Многоканальная СМО с отказами

Граф состояний многоканальной СМО с отказами имеет вид, показанный на рисунке 20.

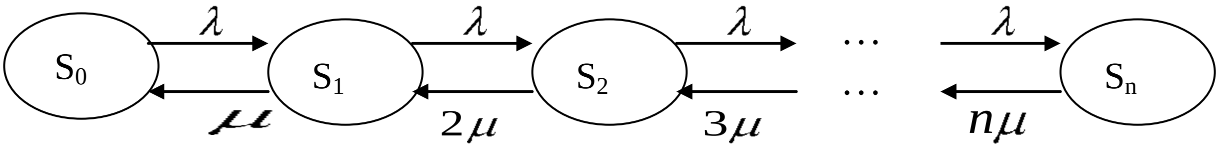

Рисунок 20 – Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Состояния данной СМО имеет следующую интерпретацию:

S_0 – все каналы свободны;

S_1 – один канал занят, остальные свободны;

S_2 – два канала заняты, остальные свободны;

……………………

S_N – заняты все n каналов, заявка получает отказ в обслуживании.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + \kappa \cdot \mu)P_k + \mu \cdot (\kappa+1) \cdot P_{k+1}, \ \ 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n. \end{cases}, \qquad (50)$$

Стационарное решение системы (50) имеет вид:

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}} = \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot P_0, \quad \mathrm{k} = \overline{0;\mathrm{n}} \\ \mathrm{P}_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}, \quad \mathrm{k} = \overline{0;\mathrm{n}} \end{cases}, \qquad (51)$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формула для вычисления вероятностей $\mathrm{P_k}$ называются **формулами Эрланга**.

Вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме

1) Вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0, \qquad (52)$$

2) Относительная пропускная способность системы (формула 34);

3) Абсолютная пропускная способность (формула 29);

4) Среднее число каналов, занятых обслуживанием:

$$\overline{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \rho \cdot (1 - P_{отк}), \qquad (53)$$

Величина $\overline{k}$ характеризует степень загрузки СМО.

Пример: Пусть n –канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя (n=3) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность $\lambda=1$ задаче в час. Средняя продолжительность обслуживания 1,8 час.

Требуется вычислить вероятностные характеристики системы. Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

Решение:

1) Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu=\frac{1}{t_{обсл}}=\frac{1}{1{,}8}=0{,}555.$$

2) Приведенная интенсивность потока заявок:

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{0{,}555}=1{,}8$$

3) Предельные вероятности состояний найдем по формулам Эрланга (51):

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{3}\frac{\rho^k}{k!}}=\frac{1}{1+1{,}8+1{,}62+0{,}97}\approx 0{,}186$$

$$P_1=1{,}8\cdot 0{,}186\approx 0{,}334$$

$$P_2=1{,}62\cdot 0{,}186\approx 0{,}301$$

$$P_3=0{,}97\cdot 0{,}186\approx 0{,}180$$

4) Вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{отк}=P_3=0{,}18$$

5) Относительная пропускная способность ВЦ

$$q=1-0{,}18=0{,}82$$

6) Абсолютная пропускная способность ВЦ

$$A=1\cdot 0{,}82=0{,}82$$

7) Среднее число занятых каналов – ПЭВМ

$$\bar{k}=1{,}8\cdot 0{,}82=1{,}476$$

Таким образом, при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято 1б5 компьютера из трех – остальные полтора будут простаивать. Работу рассмотренного ВЦ вряд ли можно считать удовлетворительной, т.к. центр не обслуживает заявки в среднем в 18% случаев (P_3=0,18). Очевидно, что пропускную способность ВЦ приданных λ и μ можно увеличить только за счет увеличения числа ПЭВМ.

Определим, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число необслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз, т.е. чтобы вероятность отказа в решении задач не превосходила 0,018.

Для этого используем формулу (52).

Составим таблицу 45.

Таблица 45 – Предельные вероятности состояний

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,357	0,226	0,186	0,172	0,167	0,166
$P_{отк}$	0,643	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Анализируя данные таблицы, следует отметить, что расширение числа каналов ВЦ при данных значениях λ и μ до 6 единиц ПЭВМ позволит обеспечить удовлетворение заявок на решение задач на 99,22%, т.к. при n=6 вероятность отказа в обслуживании составляет 0,0078.

2) Многоканальные СМО с ожиданием

Пусть система имеет С каналов обслуживания.

В установившемся режиме функционирование многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью может быть описано с помощью системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot P_n + (n+1)\mu \cdot P_{n+1} = 0, \quad 1 \le \mathrm{n} < \mathrm{C}; \\ \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + C \cdot \mu) \cdot P_n + C \cdot \mu \cdot P_{n+1} = 0, \quad \mathrm{n} \ge \mathrm{C}; \end{cases} , \qquad (54)$$

Решение системы (54) имеет вид:

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot P_0, & 0 \le \mathrm{n} < \mathrm{C} \\ \mathrm{P_n} = \dfrac{\rho^n}{C!C^{n-c}} \cdot P_0, & \mathrm{n} \ge \mathrm{C} \end{cases}, \tag{55}$$

где

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!(1 - \frac{\rho}{C})} \right\}^{-1}, \tag{56}$$

Решение будет действительным, если выполняется следующее условие: $\dfrac{\lambda}{\mu \cdot C} < 1$.

Вероятностные характеристики функционирования в стационарном режиме многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью:

1) Вероятность того, что в системе находиться n клиентов на обслуживании, определяется по формулам (55), (56).

2) Среднее число клиентов в очереди на обслуживание:

$$L_q = \left(\frac{C \cdot \rho}{(C - \rho)^2} \right) \cdot P_C, \tag{57}$$

3) Среднее число находящихся в системе клиентов:

$$L_s = L_q + \rho, \tag{58}$$

4) Средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \tag{59}$$

5) Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}, \tag{60}$$

Пример: Механическая мастерская завода с тремя постами выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывших в мастерскую, имеет интенсивность λ=2,5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма равно 0,5 суток. Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно.

Требуется определить значения вероятностных характеристик системы.

Решение:

1) Определим параметр потока обслуживаний:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{0.5} = 2$$

2) Приведенная интенсивность потока заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2,5}{2} = 1,25,$$

при этом $\frac{\lambda}{\mu \cdot C} = \frac{2,5}{2 \cdot 3} = 0,41 < 1$, то очередь не растет безгранично и в системе наступает предельный стационарный режим работы.

3) Вычислим вероятности состояний системы, используя формулы (55), (56).

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!(1 - \frac{\rho}{3})}} = \frac{1}{1 + 1,25 + \frac{1,25^2}{2} + \frac{1,25^3}{6 \cdot \left(1 - \frac{1,25}{3}\right)}} = 0,279;$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot P_0 = 1,25 \cdot 0,279 = 0,349;$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot P_0 = \frac{1,25^2}{2!} \cdot 0,279 = 0,218;$$

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = \frac{1,25^3}{3!} \cdot 0,279 = 0,091;$$

$$P_4 = \frac{\rho^4}{4!} \cdot P_0 = \frac{1,25^4}{4!} \cdot 0,279 = 0,028.$$

4) Вероятность отсутствия очереди у мастерской

$$P_{от.о} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0,279 + 0,349 + 0,218 + 0,091 = 0,937$$

5) Среднее число заявок в очереди на обслуживание вычисляется по формуле (57).

$$L_q = \left(\frac{3 \cdot 1,25}{(3-1,25)^2} \right) \cdot 0,091 \approx 0,111$$

6) Среднее число находящихся в системе заявок (формула 58):

$$L_s = 0,111 + 1,25 = 1,361$$

7) Средняя продолжительность пребывания механизма в очереди на обслуживании (по формуле 59).

$$W_q = \frac{0,111}{2,5} = 0,044 \text{ суток}$$

8) Средняя продолжительность пребывания механизма в мастерской вычисляется по формуле (60).

$$W_s = 0,044 + \frac{1}{2} \approx 0,544 \text{ суток.}$$

10.4 Задания для лабораторной работы №10

Вариант № 1

Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока λ = 0,95 вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора t = 1 мин. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Вариант № 2

В одноканальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ = 0,5 заявки в минуту. Время обслуживания заявки имеет показательное распределение с t = 1,5 мин. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Вариант № 3

В вычислительном центре работает 5 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность $\lambda =$ 10 задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 мин. Заявка получает отказ, если все ПК заняты. Найдите вероятностные характеристики системы обслуживания (ВЦ).

Вариант № 4

В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью $\lambda =$ 1,5 заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Определите вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант № 5

На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивности $\lambda =$ 4 машины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 мин., в очереди может находиться не более 5 автомобилей. Определите вероятностные характеристики пункта техосмотра в установившемся режиме.

Вариант № 6

На промышленном предприятии решается вопрос о том, сколько потребуется механиков для работы в ремонтном цехе. Пусть предприятие имеет 10 машин, требующих ремонта с учетом числа ремонтирующихся. Отказы машин происходят с частотой λ= 10 отк/час. Для устранения неисправности механику требуется в среднем t = 3 мин. Возможно, организовать 4 или 6 рабочих мест в цехе для механиков предприятия. Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант обеспечения ремонтного цеха рабочими местами для механиков.

Вариант № 7

В бухгалтерии предприятия имеются два кассира, каждый из которых может обслужить в среднем 30 сотрудников в час. Поток сотрудников, получающих заработную плату, — простейший, с интенсивностью, равной 40 сотрудников в час. Очередь в кассе не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Вычислите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме и определите целесообразность приема третьего кассира на предприятие, работающего с такой же производительностью, как и первые два.

Вариант № 8

Билетная касса работает без перерыва. Билеты продает один кассир. Среднее время обслуживания — 2 мин. на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа, равно λ= 20 пасс/час. Все потоки в системе простейшие. Определите среднюю длину очереди, вероятность простоя кассира, среднее время нахождения пассажира в билетной кассе (в очереди и на обслуживании), среднее время ожидания в очереди в условиях стационарного режима работы кассы.

Вариант № 9

Пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка на диагностику, поступившая в момент, когда пост занят, получает отказ. Интенсивность потока заявок на диагностику λ=0,5 автомобиля в час. Средняя продолжительность диагностики t =1,2 часа. Все потоки событий в системе простейшие. Определите в установившемся режиме вероятностные характеристики системы.

Вариант № 10

Автозаправочная станция представляет собой СМО с одним каналом обслуживания и одной колонкой. Площадка при АЗС допускает пребывание в очереди на заправку не более трех автомобилей одновременно. Если в очереди уже находится три автомобиля, очередной автомобиль, прибывший к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток автомобилей, прибывающих для заправки, имеет интенсивность λ= 0,7 автомобиля в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем 1,25 мин. Все потоки простейшие. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Вариант № 11

На железнодорожную сортировочную горку прибывают составы с интенсивностью λ = 2 состава в час. Среднее время, в течение которого горка обслуживает состав, равно 0,4 час. Составы, прибывающие в момент, когда горка занята, становятся в очередь и ожидают в парке прибытия, где имеется три запасных пути, на каждом из которых может ожидать один состав. Состав, прибывший в момент, когда все три запасных пути в парке прибытия заняты, становится в очередь на внешний путь. Все потоки событий простейшие.

При установившемся режиме найдите:

- среднее число составов, ожидающих в очереди (как в парке прибытия, так и вне его);

- среднее время ожидания в парке прибытия и на внешних путях;

- среднее время ожидания состава в системе обслуживания;

- вероятность того, что прибывший состав займет место на внешних путях.

Вариант № 12

Рассматривается работа АЗС, на которой имеется три заправочные колонки. Заправка одной машины длится в среднем 3 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, дожидаются своей очереди. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики работы АЗС в стационарном режиме.

Вариант № 13

На станцию технического обслуживания (СТО) автомобилей каждые два часа подъезжает в среднем одна машина. Станция имеет 6 постов обслуживания. Очередь автомобилей, ожидающих обслуживания, не ограниченна. Среднее время обслуживания од ной машины - 2 часа. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики станции технического обслуживания автомобилей.

Вариант № 14

В вычислительном центре работает 9 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток неисправностей имеет интенсивность 0,3 отказа в день. Среднее время устранения одной неисправности одним инженером равно 1,5 час. Компьютеры обслуживают три инженера с одинаковой производительностью. Все потоки событий простейшие. Возможны следующие варианты организации обслуживания ПК:

три инженера обслуживают все 9 компьютеров, так, что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае R = 3; N = 9;

каждый из трех инженеров обслуживает по три закрепленных за ним ПК. В этом случае R = 1; N = 3.Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания ПК.

Вариант № 15

Малое транспортное предприятие эксплуатирует десять моделей автомобилей одной марки. Простейший поток отказов автомобилей имеет интенсивность λ=0,25 отказа в день. Среднее время устранения одного отказа автомобиля одним механиком равно 2 час. Все потоки событий простейшие. Возможны два варианта обслуживания:

- все автомобили обслуживают два механика с одинаковой производительностью;

- все автомобили предприятия обслуживают три механика с одинаковой производительностью.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания автомобилей.

Вариант № 16

На вход телефонной станции, имеющей 9 каналов обслуживания, поступает в среднем 120 заявок в час. Заявка получает отказ, если все каналы заняты. Среднее время обслуживания в одном канале равно 4 мин. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики телефонной станции, выступающей в качестве СМО.

Вариант № 17

В магазине работает один продавец, который может обслужить в среднем 30 покупателей в час. Поток покупателей простейший с интенсивностью, равной 60 покупателей в час. Все покупатели «нетерпеливые» и уходят, если в очереди стоит 5 человек (помимо обслуживаемых). Все потоки событий простейшие. Определите следующие вероятностные характеристики магазина для стационарного режима работы:

- вероятность обслуживания покупателя;
- абсолютную пропускную способность магазина;
- среднюю длину очереди;
- среднее время ожидания в очереди;
- среднее время всего обслуживания;
- вероятность простоя продавца.

Вариант № 18

Рассматривается работа АЗС, на которой имеется пять заправочных колонок. Заправка одной машины длится в среднем 4 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь, дожидаются своей очереди. Все потоки событий простейшие. Определите вероятностные характеристики АЗС для стационарного режима.

Вариант № 19

Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью λ = 3 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки t = 0,5 час. Каждая обслуженная заявка приносит доход 5 д. е. Содержание канала обходится 3 д. е./час. Решите, выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех.

Вариант № 20

Система массового обслуживания — билетная касса с тремя окошками (с тремя кассирами) и неограниченной очередью. Пассажиров, желающих купить билет, приходит в среднем 5 человек за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания подчинено показательному закону распределения. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Вариант №21

Технические устройства (ТУ) могут время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов ТУ простейший с интенсивностью λ=1,6 отказа в сутки. Время восстановления ТУ имеет экспоненциальное распределение. Математическое ожидание времени обслуживания t=0,5 суток. Количество каналов, выполняющих обслуживание ТУ, равно 5 ед. Количество заявок в очереди не ограничено. Определите вероятностные характеристики СМО, выполняющие обслуживание ТУ в установившемся режиме.

10.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №10

1) Что понимается под системой массового обслуживания? Приведите примеры СМО.

2) Что является основными компонентами СМО?

3) Что является предметом теории массового обслуживания?

4) Какие виды СМО вы знаете?

5) Перечислите основные функциональные характеристики одноканальной СМО с отказами?

6) Перечислите основные функциональные характеристики одноканальной СМО с ожиданием?

7) Перечислите основные функциональные характеристики многоканальной СМО с отказами?

8) Перечислите основные функциональные характеристики многоканальной СМО с ожиданием?

Список использованных источников

1 **Бережная Е.В.** Математические методы моделирования экономических систем/ Е.В Бережная, В.И. Бережной. –М.: Финансы и статистика, 2002. –368 с.

2 **Агальцов В.П.** Математические методы в программировании/ В.П. Агальцов., И.В. Волдайская. –М.: Форум - Инфра-М, 2006. -224 с.

3 **Кузнецов А.В.** Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование/ А.В. Кузнецов, Р.А. Рутковский –Мн.: Вышэйшая школа, 2002. -447 с.

4 **Партыка Т.Л.** Математические методы / Т.Л. Партыка, И.И. Попов. –М.: Форум - Инфра-М, 2005. -464 с.

5 **Акулич И.Л.** Математическое программирование в примерах и задача / И.Л. Акулич. –М.: Высшая школа, 1993. –336 с.

6. **Пинегина М.В.** Математические методы и модели в экономике/ М.В. Пинегина. –М.: Экзамен, 2004. –212 с.