Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Колледж электроники и бизнеса

Предметно-цикловая комиссия физико-математических дисциплин

Т.В. Атяскина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Часть I

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний к лабораторным работам для студентов, обучающихся по программе среднего профессионального образования по специальности 230115 Программирование в компьютерных системах

Оренбург
2014

УДК 517(075.32)
ББК 22.176 я 73
А 92

Рецензент - старший преподаватель кафедры прикладной математики ОГУ, кандидат физико-математических наук, Ю.П. Иванова

Атяскина, Т.В.
А-92 Математические методы. Часть 1 [Электронный ресурс]: методические указания в 2 частях/Т.В. Атяскина; Оренбург.гос. ун-т. – "Электро.дан.- Оренбург: ОГУ, 2014.- 1 электрон. опт.диск(CD-ROM): зв.,цв.; 12 см.- Системные требования:Pentium Ш и выше; MicrosoftWindowsXP,7,8; 90Гб; видеокарта и монитор, поддерживающий режим 800x600, 65 тыс. цв.; мышь или аналогичное устроство; зв.карта, совместимая с MicrosoftWindows. – Загл.с этикетки диска.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по дисциплине "Математические методы " в колледже электроники и бизнеса ОГУ. Для студентов 3 курса специальности 230115 Программирование в компьютерных системах очной формы обучения.

Методические указания составлены с учетом Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов, утвержденного приказом № 696 от 23.06.2010 Министерством образования и науки Российской Федерации. В данных методических указаниях представлены лабораторные работы раздела «Линейное программирование».

УДК 517(075.32)
ББК 22.176 я 73

Содержание

Введение 5
1 Лабораторная работа №1. Графическое решение задач линейного программирования 7
1.1 Ход работы 7
1.2 Содержание отчета 7
1.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №1 8
1.4 Задания для лабораторной работы №1 19
1.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №1 28
2 Лабораторная работа №2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования 28
2.1 Ход работы 28
2.2 Содержание отчета 29
2.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №2 29
2.4 Задания для лабораторной работы №2 39
2.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №2 42
3 Лабораторная работа №3. Нахождение опорного плана в транспортных задачах методом «северо-западного угла» 42
3.1 Ход работы 43
3.2 Содержание отчета 43
3.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №3 43
3.4 Задания для лабораторной работы 3 47
3.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №3 54
4 Лабораторная работа №4. Нахождение опорного плана в транспортных задачах методом минимального элемента 54
4.1 Ход работы 54
4.2 Содержание отчета 55
4.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №4 55
4.4 Задания для лабораторной работы №4 57
4.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №4 57

5 Лабораторная работа №5. Нахождение опорного плана в транспортных задачах методом Фогеля 57
5.1 Ход работы 57
5.2 Содержание отчета 58
5.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №5 58
5.4 Задания для лабораторной работы №5 60
5.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №5 60
Список использованных источников 61

Введение

По мере развития науки и техники перед человеком все чаще встает проблема: «Как найти правильное решение?». Для облегчения решения этой задачи реальные процессы (или объекты) заменяются их аналогами или моделями. Затем производится анализ поведения модели в тех или иных условиях с помощью персонального компьютера. В этом случае говорят о компьютерном моделировании. Но персональный компьютер может работать только с математическими моделями, которые с помощью языков программирования переводятся в набор машинных кодов, которые и обрабатывает персональный компьютер. Какое же место занимают математические модели и как они получаются?

Построение математической модели процесса, явления или объекта начинается с построения упрощенного варианта модели, в котором учитываются только основные черты. В результате прослеживаются основные связи между входными параметрами, ограничениями и показателем эффективности. Общего подхода к построению модели нет. В каждом конкретном случае при построении математической модели учитывается большое количество факторов: цель построения модели, круг решаемых задач, точность описания модели и точность выполнения вычислений. Математическая модель должна отражать все существенные факторы, определяющие ее поведение, и при этом быть простой и удобной для восприятия результатов. Каждая математическая модель процесса, явления или объекта в своей основе имеет математический количественный метод.

Применение математических количественных методов для обоснования выбора того или иного управляющего решения во всех областях человеческой деятельности называется исследованием операций. Целью исследования операций является нахождение с использованием специального математического аппарата решения, удовлетворяющего заданным условиям.

Оптимизационная задача – это экономико-математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений. Для того чтобы решить задачу оптимизации, достаточно найти ее оптимальное решение. Если целевая функция в задаче является функцией n переменных, то методы решения называют методами математического программирования. (Термин «программирование» в данном случае обусловлен тем, что в задачах ищется некоторая программа действий).

В математическом программировании традиционно выделяют следующие основные разделы:

- линейное программирование;
- целочисленное программирование;
- выпуклое программирование.

В данном учебном пособии рассмотрен раздел «Линейное программирование», приведены краткие теоретические сведения, примеры задач с решениями, варианты заданий и контрольные вопросы по пяти лабораторным работам.

Методические рекомендации разработаны для студентов специальности 230115 Программирование в компьютерных системах, изучающие математические методы. Учебная дисциплина «Математические методы» является общепрофессиональной дисциплиной вариативной части профессионального цикла и федеральному компоненту ОПОП СПО, которая обеспечивает профессиональный уровень подготовки специалиста и соответствует развитию их профессионально значимых качеств.

Изучение данной дисциплины базируется на дисциплины математического и общего естественнонаучного цикла: «Элементы высшей математики», «Элементы математической логики», «Теория вероятностей и математическая статистика», дисциплины профессионального цикла: «Основы программирования», «Теория алгоритмов», «Основы объектно-ориентированного программирования», «Основы web - программирования» и дисциплины профессиональных модулей.

1 Лабораторная работа №1. Графическое решение задач линейного программирования

Цель работы: Приобретение навыков построения математической модели задач линейного программирования, решения задач графическим способом.

1.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условия задач.

3) построить математическую модель задачи линейного программирования (задание №1).

4) решить задачу линейного программирования графическим способом (задание №2).

5) оформить отчет по лабораторной работе.

1.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) математическую модель задания №1;

5) графическое решение задания №2;

6) вывод о проделанной работе.

1.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №1

1.3.1 Общая постановка задач линейного программирования

Линейное программирование – это раздел математики ориентируемый на нахождении экстремума в задачах, которые описываются линейными уравнениями.

Задачей линейного программирования называется задача исследования операций, математическая модель которой имеет вид:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min (\max) \qquad (1)$$

Целевая функция (1) - линейная форма.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_j \text{ (или } \ge b_j\text{)},\ i = \overline{1,m} = 1,2\ldots m \qquad (2)$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases} \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$$

Система (3) - система ограничений задачи линейного программирования (ЗЛП).

Если математическая модель ЗЛП имеет вид:

$$\begin{aligned} & F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} \end{aligned} \qquad (4)$$

$x_j \ge 0$, $b_i \ge 0$, то ЗЛП представлена в **канонической форме**.

1.3.2 Построение математических моделей задач линейного программирования (ЗЛП)

Рассмотрим процесс построения математических моделей ЗЛП на примерах.

Пример 1 - Задача о диете

Из имеющихся в распоряжении видов пищи нужно составить такую диету, которая, с одной стороны, обеспечивала бы удовлетворение минимальных потребностей организма в питательных веществах (белках, жирах, углеводах, витаминах и т.д.) и вместе с тем требовала бы наименьших затрат.

Рассмотрим простую математическую модель этой задачи.

Пусть имеются два вида продуктов, $П_1$ и $П_2$, содержащих питательные вещества A, B, C. Известно, сколько питательных веществ того или иного вида содержится в 1 кг пищи $П_1$ или $П_2$; эти сведения указаны в таблице 1.

Таблица 1 – Условие задачи о диете

Продукты	Питательные вещества		
	A	B	C
$П_1$	a_1	b_1	c_1
$П_2$	a_2	b_2	c_2

Кроме этих данных, нам известны: a, b, c – ежесуточная потребность организма в A, B, C (соответственно) и s_1 и s_2 – стоимость 1 кг пищи $П_1$, $П_2$ (соответственно).

Требуется рассчитать количество x_1 продукта $П_1$ и количество x_2 продукта $П_2$ так, чтобы обеспечить необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на пищу.

Очевидно, общая стоимость продуктов составит $S = s_1x_1 + s_2x_2$.

Общее количество вещества *A* в обоих видах пищи равно $a_1x_1 + a_2x_2$. Оно должно быть не меньше a: $a_1x_1 + a_2x_2 \geq a$.

Аналогичные неравенства должны выполняться для B и C: $b_1x_1 + b_2x_2 \geq b$, $c_1x_1 + c_2x_2 \geq c$.

Таким образом, приходим к следующей задаче.

Дана система трех линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2 (5) и линейная функция $S = s_1x_1 + s_2x_2$.

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \geq a \\ b_1x_1 + b_2x_2 \geq b \\ c_1x_1 + c_2x_2 \geq c \end{cases} \qquad (5)$$

Требуется среди неотрицательных решений (x_1, x_2) системы (5) выбрать такое, при котором функция S, достигает наименьшего значения (минимизируется).

Пример 2 - Задача о распределении ресурсов

Предприятие имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов (сырье, оборудование и т.д.), из этих ресурсов выпускается определенное количество товаров.

Известно количество единиц каждого из ресурсов, используемых при производстве единицы каждого вида товара. Известен также доход, полученный предприятием от выпуска одной единицы товара. При этих условиях требуется выпустить такое количество товаров, чтобы доход их был максимальным.

Пусть предприятие имеет 3 вида ресурсов: R_1, R_2, R_3 в количестве b_1, b_2, b_3 единиц соответственно (таблица 2). Предприятие выпускает товары 2 видов: T_1 и T_2. Известно, что a_{ij} – количество единиц ресурса R_i, используемого для выпуска 1 единицы товара T_j и c_1, c_2 – доход от 1 единицы товара T_1 и T_2. При этих условиях требуется выпустить количество товаров T_1 и T_2, чтобы доход был максимальным.

Таблица 2 – Условие задачи о распределении ресурсов

Ресурсы	Товары		Кол-во ресурсов
	T_1	T_2	
R_1	a_{11}	a_{12}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	b_2
R_3	a_{31}	a_{32}	b_3

Обозначим: x_1 – количество товара T_1; x_2 – количество товара T_2 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Для выпуска товаров с использованием ресурса R_1 понадобиться следующее количество единиц этого ресурса: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$. Так как ресурса R_1 должно хватить на выпуск товара T_1 и T_2, то затраты не должны превышать наличие этого ресурса, таким образом $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$.

Из условия задачи составим систему ограничений (6).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \end{cases} \qquad (6)$$

Составим линейную форму: $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$

Требуется среди неотрицательных решений (x_1, x_2) системы (6) выбрать такое, при котором функция F, достигает наибольшего значения (максимизируется).

К подобным схемам могут быть сведены различные задачи о составлении сплавов, смесей горючего, задачи об определении состава животноводческих кормовых смесей наименьшей стоимости, о составлении смеси химических удобрений и т. д.

Пример 3 - Транспортная задача

Уголь, добываемый в нескольких месторождениях, отправляется ряду потребителей: заводам, электростанциям и т. п. Известно, сколько угля добывается в каждом из месторождений, скажем, за месяц, и сколько его требуется на тот же срок любому из потребителей. Известны расстояния между месторождениями и потребителями, а также условия сообщения между ними; учитывая эти данные, можно подсчитать, во что обходится перевозка каждой тонны угля из любого месторождения в любой пункт потребления. Требуется при этих условиях спланировать перевозки угля таким образом, чтобы затраты на них были минимальными.

Примем, что имеются лишь два месторождения M_1 M_2 и три потребителя $П_1$ $П_2$, $П_3$. Количества угля в $М_1$ и $М_2$ равны соответственно a_1 и a_2; потребности пунктов $П_1$ $П_2$, $П_3$ пусть будут соответственно b_1, b_2, b_3 - Будем считать, что суммарные запасы равны суммарным потребностям: $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$. Наконец, заданы числа C_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) - стоимости перевозки тонны угля из $М_i$ в $П_j$ Задача состоит в нахождении шести чисел x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, где x_{ij} - количество угля, предназначенное к отправке из $М_I$ в $П_j$. Для удобства обозрения составим таблицу 3.

Таблица 3 – Транспортная задача

	в П1	в $П_2$	в $П_3$	Всего отправлено
Из М1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	a_1
Из М2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	a_2
Всего привезено	b_1	b_2	b_3	

Общее количество угля, вывезенное из $М_1$ должно равняться a_1; отсюда имеем условие $x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$

Аналогичное условие должно выполняться для $М_2$: $x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2$.

Общее количество угля, привезенное в $П_1$ должно равняться b_1; отсюда $x_{11} + x_{21} = b_1$. Аналогично получаем условия: $x_{12} + x_{22} = b_2$, $x_{13} + x_{23} = b_3$.

Предполагаем, что стоимость перевозки прямо пропорциональна количеству перевозимого угля, т.е. перевозка из $М_i$ в $П_j$ стоит $c_{ij} \cdot x_{ij}$. Тогда общая стоимость всех перевозок будет $S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$

Таким образом, приходим к следующей задаче.

Дана система:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, \\ x_{11} + x_{21} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} = b_2, \\ x_{13} + x_{23} = b_3. \end{cases} \qquad (7)$$

и линейная функция $S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$. Требуется среди неотрицательных решений x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} системы (7) выбрать такое, при котором функция S достигает наименьшего значения (минимизируется).

2.3.3 Графическое решение задач линейного программирования

Графический способ решения ЗЛП целесообразно использовать для решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (8)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Данный метод основывается на возможности графического изображения области допустимых решений задачи и нахождении среди них оптимального решения. Область допустимых решений задачи строится как пересечение (общая часть) областей решений каждого из заданных ограничений.

Алгоритм графического метода решения задач линейного программирования с двумя переменными:

1) Построить прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничения знаков неравенств на знаки равенств;

2) Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи;

3) Определить многоугольник решений;

4) Построить вектор $\vec{C}$ = (c_1;c_2) – вектор градиент;

5) Построить прямую $F = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\vec{C}$;

6) Передвигать прямую F в направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего либо найти точку, в которой целевая функция принимает экстремум (максимум или минимум), либо установить неограниченность функции на множестве планов;

7) Определить координаты точки экстремума функции и вычислить значение целевой функции в этой точки.

Пример: Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ дан в таблице 4.

Таблица 4 - Расход сырья продукции

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3д.е. – для $П_1$ 4 д.е. для $П_2$.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение: Для построения математической модели остается только идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции П1 и x_2 единиц продукции П2. поскольку производство продукции П1 и П2 ограничено имеющимися в распоряжении в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготавливаемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ x_2 \le 2. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 продукции $П_2$ составит $Z = 3x_1 + 4x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция Z принимает максимальное значение.

Найдем решение данной задачи графическим способом.

Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат $X_1 0 X_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \quad (L1);$$

$$3x_1 + 2x_2 = 13 \quad (L2);$$

$$x_1 - x_2 = 1 \quad (L3);$$

$$x_2 = 2 \quad (L4).$$

Взяв какую-либо точку, например, начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Полуплоскости, определяемые неравенствами, на рисунке 1 показаны стрелками. Областью решений являются многоугольник *OABCD*.

Для построения прямой $Z = 3x_1 + 4x_2 = 0$ строим вектор-градиент

$\vec{C}$ = (3;4) и через точку О проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую Z = 0 перемещаем параллельно самой себе в направление вектора С. Из рисунка 1 следует, что по отношению к многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке С, где функция принимает максимальное значение.

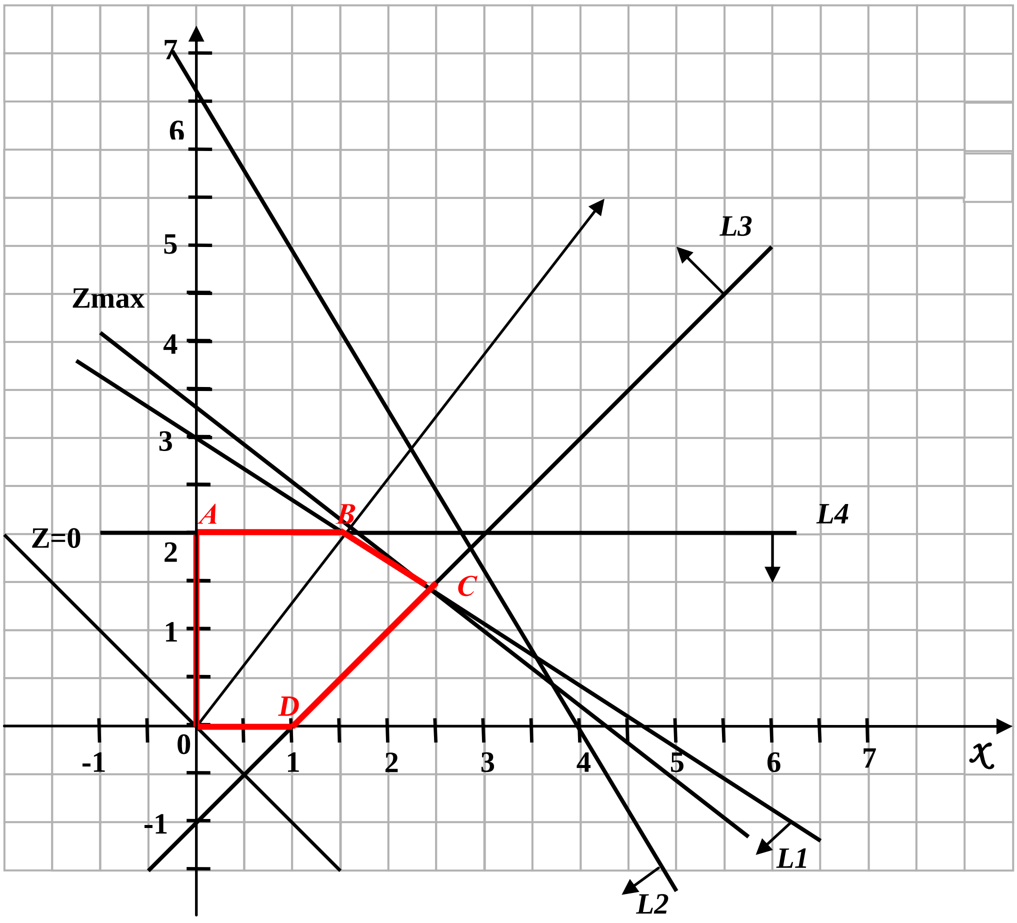

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация решения задач линейного программирования

Точка С лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9; \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи x1 = 2,4; x2 = 1,4. Подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию, получим:

$$Z_{max} = 3 * 2,4 + 4 * 1,4 = 12,8.$$

Полученное решение означает, что объем производства продукции $П_1$ должен быть равен 2,4 ед., а продукции $П_2$ – 1,4 ед. доход, получаемый в этом случае, составит: Z = 12,8 д.е.

При нахождении решения ЗЛП графическим способом могут встретиться следующие случаи (рисунки 2-5):

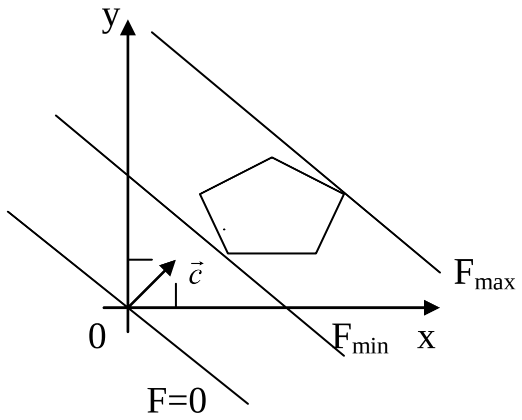

Рисунок 2 – Единственное решение ЗЛП

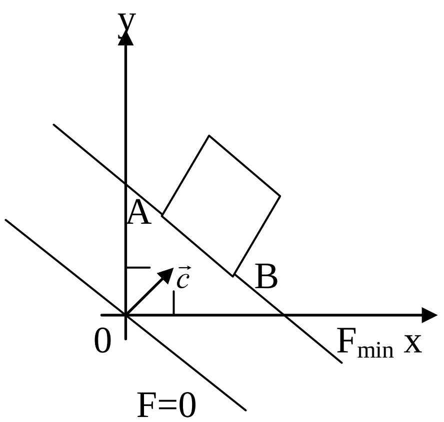

Рисунок 3 - Бесчисленное множество решений ЗЛП

(любая точка отрезка АВ)

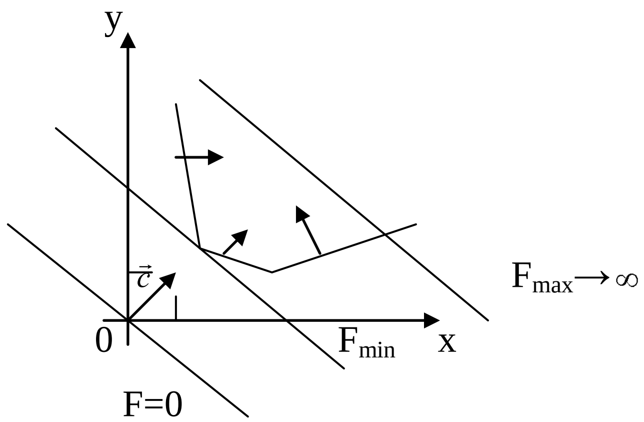

Рисунок 4 – ЗЛП не имеет максимальное решение

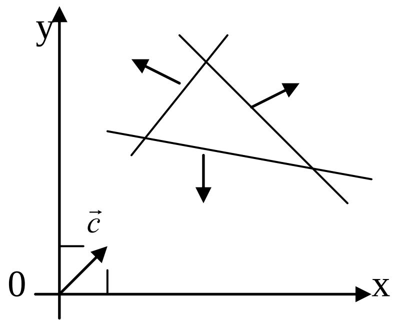

Рисунок 5 – ЗЛП не имеет многоугольника решений

Свойства задач линейного программирования:

1) Допустимое множество задачи линейного программирования либо пусто, либо является выпуклым подмножеством пространства R^n.

2) Если допустимое множество задачи линейного программирования не пусто, а целевая функция ограничена снизу (для задачи минимизации) на этом множестве, то задача линейного программирования имеет оптимальное решение.

3) Оптимальные решения задачи линейного программирования (если они существуют) всегда находятся на границе допустимого множества и образуют выпуклое подмножество пространства R^n.

1.4 Задания для лабораторной работы №1

Задание №1

Построить математическую модель задачи линейного программирования, согласно номера своего варианта.

Вариант 1

При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице 5.

Таблица 5 – Условие задачи варианта 1

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	Корма 1	Корма 2
Белки	3	1
Углеводы	1	2

Стоимость 1 кг корма первого вида - 4 д.е., второго - 6 д.е.

Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

Варианта 2

Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь 100 ед., труд - 120 ед., тяга - 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Организация производства характеризуется следующей таблицей 6.

Таблица 6 – Условие задачи варианта 2

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	площадь	труд	тяга	
П1	2	2	2	1
П2	3	1	3	4
П3	4	2	1	3

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Вариант 3

Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовле- ния трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа - 3 т, проволоки - 18 т. На один трансформатор первого вида расходуются 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуются 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 д. е., второго - 4 д. е.

Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Вариант 4

Совхоз отвел три земельных массива размером 5000, 8000, 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в таблице 7.

Таблица 7 – Условие задачи варианта 4

Посевы	Массивы		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

За 1 ц ржи совхоз получает 2 д. е., за 1 ц пшеницы - 2,8 д. е., за I ц кукурузы — 1,4 д. е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1900 т ржи, 158 000 т пшеницы и 30 000 т кукурузы?

Вариант 5

Из трех продуктов - I, II, III составляется смесь. В ее смеси должно входить не менее 6 ед. химического вещества A, 8 ед. вещества B и не менее 12 ед. вещества C. Структура химических веществ приведена в следующей таблице 8.

Таблица 8 – Условие задачи варианта 5

Продукт	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость 1 ед. продукции
	A	B	C	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Составьте наиболее дешевую смесь.

Вариант 6

Цех выпускает три вида деталей - A, B, C. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе характеризуется следующей таблицей 9.

Таблица 9 – Условие задачи варианта 6

Станок	Длительность обработки детали,			Фонд времени, час
	A	B	C	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Отпускная цена за одну деталь	30	32	30	

Составьте план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

Вариант 7

Предприятие должно выпускать два вида продукции — А и В, используя при этом последовательно четыре станка. Данные о технологическом процессе указаны в следующей таблице 10.

Таблица 10 – Условие задачи варианта 7

Станок	Трудоемкость на 1 ед. продукции		Фонд времени, час.
	A	B	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
4	1	2	8
Прибыль на 1 ед. продукции (д. е.)	2	3	

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Вариант 8

На предприятии для производства запасных частей автомобилей используются три вида ресурсов. Выпускаются три вида запасных частей. Организация производства на предприятии характеризуется таблицей 11.

Таблица 11 – Условие задачи варианта 8

Ресурсы	Расход материалов на производство одной запасной части, кг			Запас кг
	1	2	3	
I	5	5	2	1200
II	4	-	3	300
III	-	2	4	800
Прибыль от реализации одной запасной части (д. е.)	5	8	6	

Составьте план производства запасных частей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Вариант 9

Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л. алкилата, 250 тыс. л. крекинг-бензина, 350 тыс. л. бензина прямой перегонки и 100 тыс. л. изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А-2:3:5:2, бензин В-3:1:2:1, бензин С-2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л. указанных сортов бензина характеризуется числами 120 д. е., 100 д. е., 150 д. е.

Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

Вариант 10

Планируется нанесение удара по некоторому объекту тремя различными видами оружия: оружием А – в течение 3 мин., оружием Б - в течение 5 мин., оружием В - в течение 4 мин. Возможности средств обеспечения стрельбы таковы, что при применении оружия А в течение 3 мин., оружия Б в течение 2 мин., оружия В в течение 4 мин. общее количество залпов не должно превышать 15. При применении оружия А в течение 2 мин. и оружия В в течение 3 мин. общее количество залпов не должно превышать 8 ед. Кроме того, для преодоления противодействия противника необходимо, чтобы количество залпов оружием В за 1 мин. было больше, чем 5 ед.

Рассчитайте темп стрельбы (количество залпов в 1 мин.) всеми видами оружия, при котором общее количество залпов в ударе будет наибольшим.

Вариант 11

Имеются два элеватора, в которых сосредоточено ответственно 4200 и 1200 т зерна. Зерно необходимо перевезти трем хлебозаводам в количестве 1000, 2000 и 1600 т каждому. Расстояние от элеватора до хлебозаводов указано в следующей таблице 14.

Таблица 12 – Условие задачи варианта 11

Элеваторы	Хлебозаводы		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км составляют 25 д.е. Спланируйте перевозки зерна из условия минимизации транспортных расходов.

Вариант 12

Из двух сортов бензина образуются две смеси — А и В. Смесь А содержит бензина 60 % 1-го сорта и 40 % 2-го сорта; смесь В — 80 % 1-го сорта и 20 % 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А — 10 д.е., а смеси В — 12 д.е.

Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется бензина 50 т 1-го сорта и 30 т 2-го сорта.

Вариант 13

Имеются две почвенно-климатические зоны, площади которых соответственно равны 0,8 и 0,6 млн. га. Данные об урожайности зерновых культур приведены в следующей таблице 13.

Таблица 13 – Условие задачи варианта 13

Зерновые культуры	Урожайность (ц/га)		Стоимость 1 ц, д. е.
	1-я зона	2-я зона	
Озимые	20	25	8
Яровые	25	20	7

Определите размеры посевных площадей озимых и яровых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении.

Вариант 14

Предприятие производит сборку автомашин двух марок: A_1 и A_2. Для этого требуются следующие материалы: S_{1}- комплекты заготовок металлоконструкций в количестве b_1=17 шт., необходимые для сборки автомашин марок A_1 и A_2 (соответственно 2 и 3 ед.); S_2 - комплекты резиновых изделий в количестве b_2 = 11 шт. (соответственно 2 и 1 ед:); S_3 -двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b_3 = 6 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_1; S_4 - двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b_4 = 5 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_1 Стоимость автомашины марки A_1 - c_1 = 7 тыс. ден. ед., а автомашины A_2 - c_2 = 5 тыс. ден. ед. Определить план выпуска, обеспечивающий предприятию максимальную выручку.

Вариант 15

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 усл. ед., жиров не менее 70 и витаминов не менее 10 усл. ед. Содержание их в продуктах $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1). Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ - 2 ден. ед., $П_2$ - 3 ден. ёд. Требуется так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

Задание №2

Решить задачу линейного программирования графическим способом, согласно номера своего варианта.

Во всех задачах $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Вариант 1

$W = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

Вариант 2

$W = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3x_2 \geq -3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Вариант 3

$F = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 20 \\ 8x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Вариант 4

$W = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq -12 \\ -8x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \end{cases}$$

Вариант 5

$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{cases}$$

Вариант 6

$W = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Вариант 7

$W = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 8

$W = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ -2x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Вариант 9

$W = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \end{cases}$$

Вариант 10

$W = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \end{cases}$$

Вариант 11

$W = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Вариант 12

$W = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Вариант 13

$W = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Вариант 14

$W = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Вариант 15

$W = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow max;$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 1 \\ x_2 \geq 4 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 9 \end{cases}$$

1.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №1

1) Какие задачи относятся к задачам линейного программирования?
2) Что называется системой ограничения и целевой функцией задачи линейного программирования?
3) Что означает понятие каноническая форма записи задачи линейного программирования?
4) Какое решение называется оптимальным?
5) Как определяется область допустимых решений?
6) Что означает понятие вектор решений (вектор-градиент)?
7) В каком случае задача линейного программирования не имеет решение?

2 Лабораторная работа №2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Цель работы: Приобретение навыков решения задач линейного программирования симплекс-методом.

2.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условия задач из лабораторной работы №2.

3) решить задачу линейного программирования с использованием симплекс-таблиц.

4) оформить отчет по лабораторной работе.

2.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;
2) цель работы;
3) формулировку задания;
4) решение задачи своего варианта с использованием симплекс-таблиц;
5) вывод о проделанной работе.

2.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №2

2.3.1 Алгоритм симплекс-метода с помощью симплекс таблиц

Прежде, чем решать ЗЛП симплекс-методом, ее необходимо привести к канонической форме. После этого выделяют переменные, которые присутствуют только в одном уравнении системы с коэффициентом единица, и принимают их качестве базисных переменных. Остальные переменные будут считаться свободными переменными.

Рассмотрим систему ограничений (9) и линейную форму (10) вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ a_{12}x_2+\ldots+ a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+ a_{22}x_2+\ldots+ a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+ a_{m2}x_2+\ldots+ a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (9)$$

$$Z= c_0+c_1x_1+ c_2x_2+\ldots +c_nx_n\rightarrow \min (\max), \qquad (10)$$

$$x_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots n.$$

Приведем систему (9) к виду, где выделены базисные переменные:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots a'_{rn}x_n = b'_r, \end{cases} \qquad (11)$$

где $b'_i \geq 0$ $(i=1,2,..r)$, $x_i \geq 0$ $(i=1,2,\ldots n)$.

Приведем линейную форму Z (10) к виду:

$$Z - c_{r+1}x_{r+1} - \ldots - c_n x_n = c_0 \rightarrow \min\ (\max) \qquad (12)$$

$x_1, x_2, \ldots x_r$ – базисные переменные;

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n$ – свободные переменные.

Условия (11) и (12) занесем в симплекс – таблицу 14.

Таблица 14 – Симплекс-таблица

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	…	x_r	x_{r+1}	…	x_n	Симплекс-отношение
x_1	b'_1	1	0	…	0	$a'_{1,r+1}$	…	a'_{1n}	
x_2	b'_2	0	1	…	0	$a'_{2,r+1}$	…	a'_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_r	b'_r	0	0	…	0	$a'_{r,r+1}$	…	$a'_{r\,n}$	
Z	c_0	0	0	…	1	$-c_{r+1}$	…	$-c_n$	

Алгоритм симплекс-метода с помощью симплекс таблиц:

1) В последней строке симплекс - таблицы находят наименьший отрицательное число при отыскании max, либо наибольшее положительное число при min, не считая свободного члена. Столбец соответствующий этому элементу считается разрешающим.

Если такого нет, то исходное базисное решение является оптимальным и данная таблица является последней: $X=(b'_1, b'_2, \ldots b'_r)$, $Z=c_0$.

2) Вычисляют отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (симплекс - отношение). Находят наименьшее из этих симплекс - отношений, оно соответствует разрешающей строке;

3) На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент;

Замечание: Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выбирается любое из них, то же самое относится к положительным (отрицательным) элементам последней строки симплекс таблице.

4) Далее переходят к следующей симплекс-таблице, неизвестные переменные, соответствующие разрешающей строке и разрешающему столбцу меняются местами. При этом базисная переменная становится свободной переменной и наоборот.

5) Делят каждый элемент разрешающей строки на разрешающий элемент и полученные значения записывают в строку с измененной базисной переменной новой симплекс-таблицы.

6) В новой симплекс-таблице все элементы разрешающего столбца должны быть равны 0, кроме разрешающего элемента, он всегда равен 1.

7) Как только получается таблица, в которой в последней строке все элементы отрицательны (положительны), считается, что минимум (максимум) найден. Минимальное (максимальное) значение функции равно свободному члену в строке целевой функции, а оптимальное решение определяется свободными членами при базисных переменных, все свободные переменные в этом случае равны нулю.

8) Если в разрешающем столбце все элементы отрицательны, то задача решений не имеет (минимум не достигается).

Пример 1: Найти минимум целевой функции $F = x_4 - x_5$, если система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{cases}$$

Решение:

x_4, x_5 – свободные переменные

x_1, x_2, x_3 – базисные переменные (зависят от свободных)

Для составления симплекс-таблиц (таблицы 15-17) систему ограничений и функцию F необходимо представить в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$F - x_4 + x_5 = 0$

Таблица 15 – Первый шаг симплекс-метода

	Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5 $\downarrow P$	Симплекс отношение
	X_1	1	1	0	0	1	-2	-
$\vec{P}$	X_2	2	0	1	0	-2	1	2
	X_3	3	0	0	1	3	1	3
	F	0	0	0	0	-1	1	

В последней строке таблицы 15 наибольшее положительное число равно 1, таким образом, столбец x_5 будет разрешающим. Определим симплекс-отношение и выберем минимальное из них – это число 2. Следовательно, строка x_2 - разрешающая строка. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится число 1 – разрешающий элемент. С помощью преобразований приведем элементы разрешающего столбца к 0, кроме разрешающего элемента.

Построим новую симплекс-таблицу 16, в которой переменная x_5 перейдет в разряд базисных переменных, а переменная x_2 - в разряд свободных переменных.

Таблица 16 – Второй шаг симплекс-метода

$\downarrow P$

	Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Симплекс отношение
	X_1	5	1	2	0	-3	0	-
	X_5	2	0	1	0	-2	1	-
$\vec{P}$	X_3	1	0	-1	1	5	0	1/5
	F	-2	0	-1	0	1	0	

В последней строке таблицы 16 наибольшее положительное число равно 1, таким образом, столбец x_4 будет разрешающим. Определим симплекс-отношение - 1/5. Следовательно, строка x_3 - разрешающая строка. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится число 5 – разрешающий элемент. Умножим каждый элемент строки x_3 на 1/5 для того, чтобы разрешающий элемент равнялся 1. Преобразуем оставшиеся элементы разрешающего столбца так, чтобы они были равны 0.

Построим новую симплекс-таблицу 17, в которой переменная x_4 перейдет в разряд базисных переменных, а переменная x_3 - в разряд свободных переменных.

Таблица 17 – Третий шаг симплекс-метода

Базисные переменные	Свободный член	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Симплекс-отношение
X_1	28/5	1	7/5	3/5	0	0	
X_5	12/5	0	3/5	2/5	0	1	
X_4	1/5	0	-1/5	1/5	1	0	
F	-11/5	0	-4/5	-1/5	0	0	

В последней строке таблицы 17 нет положительных элементов, следовательно, оптимальное решение найдено. Оптимальное решение определяется свободными членами при базисных переменных, все свободные переменные в этом случае равны нулю.

Ответ: $F_{min} = -\frac{11}{5}$; $x = (\frac{28}{5}; 0; 0; \frac{1}{5}; \frac{12}{5})$.

Пример 2: Найти максимум целевой функции $F = x_1 + x_2$, если система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1+x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \end{cases}$$

Решение:

Приведем данную систему к канонической форме:

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2+x_4 = 2 \end{cases}$$

x_1, x_2 – свободные переменные;

x_3, x_4 – базисные переменные;

Для составления симплекс-таблиц (таблицы 18-19) функцию F необходимо представить в виде $F - x_1 - x_2 = 0$

Таблица 18 – Первый шаг симплекс-метода

$\downarrow P$

	Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4	Симплекс отношение
	X_3	1	-1	1	1	0	-
$\vec{P}$	X_4	2	1	-2	0	1	1/2
	F	0	-1	-1	0	0	

В последней строке таблицы 18 наименьшее отрицательное число равно -1, таким образом, столбцы x_1 и x_2 может быть разрешающими. Выберем первый столбец в качестве разрешающего столбца. Определим симплекс-отношение и выберем минимальное из них – это число 1/2. Следовательно, строка x_4 - разрешающая строка. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится число 1 – разрешающий элемент. С помощью преобразований приведем элементы разрешающего столбца к 0, кроме разрешающего элемента.

Построим новую симплекс-таблицу 19, в которой переменная x_1 перейдет в разряд базисных переменных, а переменная x_4 - в разряд свободных переменных.

Таблица 19 – Второй шаг симплекс-метода

$\downarrow P$

Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4	Симплекс отношение
X_3	3	0	-1	1	1	
X_1	2	1	-2	0	1	
F	2	0	-3	0	-1	

В последней строке таблицы 19 наименьшее отрицательное число равно -3, таким образом, столбец x_2 будет разрешающим. Все элементы разрешающего столбца - отрицательные элементы. Следовательно, задача решений не имеет.

Ответ: решений нет.

2.3.2 Метод искусственного базиса для нахождения опорного решения задач линейного программирования

Сформулированный выше алгоритм симплекс-метода можно применять лишь в том случае, если выделено первое допустимое решение, т.е определяются базисные переменные. Если базисные переменные в системе ограничений не определяются, то задачу можно решить методом искусственного базиса. Для этого вводятся в уравнения системы, где нет базисных переменных, искусственные базисные переменные y_i, i=1,2,..m, такие, что:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} y_i \rightarrow \min\ (\max);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_j = b_i$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Далее можно применить алгоритм симплекс-метода с помощью симплекс-таблиц.

Пример 3: Найти минимум целевой функции F = x_1 + $2x_2$, если система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$$

Решение:

В базис можно выделить переменную x_3. Так как свободные члены во втором и третьем уравнении отрицательные, то умножим левую и правую части на (-1). Введем две искусственные переменные – y_1 и y_2 во второе и в третье уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 - x_5 + y_1 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5 + y_2 = 5 \end{cases}$$

$Z_{min} = y_1 + y_2 = 9 + 3x_1 - 5x_2 + 3x_4 - 2x_5$.

Для составления симплекс-таблиц функции F и Z представим в виде:

$F - x_1 - 2x_2 = 0$

$Z - 3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 9$

Составим симплекс-таблицу 20.

Таблица 20 - Первый шаг симплекс-метода

$\downarrow P$

	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Симплекс отношение
	x_3	1	3	-5	1	2	0	0	0	-
	y_1	4	-2	2	0	-1	1	1	0	2
$\vec{P}$	y_2	5	-1	3	0	-2	1	0	1	5/3
	F	0	-1	-2	0	0	0	0	0	
	Z	9	-3	5	0	-3	2	0	0	

Используя алгоритм симплекс-метода с использованием симплекс-таблиц, найдем оптимальное решение задачи (таблицы 21-25).

Таблица 21 – Второй шаг симплекс-метода

$\downarrow P$

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Симплекс отношение
x_3	28/3	4/3	0	1	-4/3	5/3	0	5/3	-
y_1 $\vec{P}$	2/3	-4/3	0	0	1/3	1/3	1	-2/3	2
x_2	5/3	-1	1	0	-2/3	1/3	0	1/3	-
F	10/3	-5/3	0	0	-4/3	2/3	0	2/3	
Z	2/3	-4/3	0	0	1/3	1/3	0	-5/3	

Таблица 22 – Третий шаг симплекс-метода

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Симплекс отношение
x_3	12	-4	0	1	0	3	4	-1	
x_4	2	-4	0	0	1	1	3	-2	
x_2	3	-3	1	0	0	1	2	-1	
F	6	-7	0	0	0	2	4	-2	
Z	0	0	0	0	0	0	-1	-1	

Так как Z_{min}=0, а переменные y_1 и y_2 переведены в число свободных, переход к первому опорному решению завершен. Строку, соответствующей Z, и столбцы y_1, y_2 вычеркиваем в последней таблице и переписываем ее в новом виде.

Таблица 23 - Четвертый шаг симплекс-метода

$\downarrow P$

	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплекс отношение
	x_3	12	-4	0	1	0	3	4
$\vec{P}$	x_4	2	-4	0	0	1	1	2
	x_2	3	-3	1	0	0	1	3
	F	6	-7	0	0	0	2	

Таблица 24 – Пятый шаг симплекс-метода

$\downarrow P$

	Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплекс отношение
$\vec{P}$	x_3	6	8	0	1	-3	0	6/8
	x_5	2	-4	0	0	1	1	-
	x_2	1	1	1	0	-1	0	1
	F	2	1	0	0	-2	0	

Таблица 25 – Шестой шаг симплекс-метода

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплекс отношение
x_1	3/4	1	0	4/8	3/8	0	
x_5	5	0	0	4/8	-1/2	1	
x_2	1/4	0	1	-1/8	-5/8	0	
F	5/4	0	0	-1/8	-4/8	0	

В последней строке таблицы 25 нет положительных элементов, следовательно, оптимальное решение найдено. Оптимальное решение определяется свободными членами при базисных переменных, все свободные переменные в этом случае равны нулю.

Ответ: $F_{min} = \frac{5}{4}$; $x = (\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 0; 0; 5)$.

2.4 Задания для лабораторной работы №2

Задание №1

Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи из лабораторной работы №1 (любую одну задачу из двух). Решить задачу линейного программирования с использованием симплекс-таблиц.

Задание №2

Решите задачу линейного программирования симплекс-методом, согласно номера своего варианта:

1) $\min L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

2) $\min L = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 16; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 14; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

3) $\min L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 9; \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

4) $\min L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 10; \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

5) $\min L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 15; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

6) $\min L = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

7) $\min L = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

8) $\min L = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

9) $\min L = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

10) $\min L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

11) $\min L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

12) $\min L = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 13; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

13) $\min L = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

14) $\min L = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

15) $\min L = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6; \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = \overline{1;4}$

2.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №2

1) В чем состоит практическая реализация симплекс – таблиц?
2) Какие переменные называются базисными переменными?
3) Какие переменные называются свободными переменными?
4) Как найти разрешающую строку, разрешающий столбец, разрешающий элемент в симплекс – таблице?
5) Как найти симплекс – отношение в симплекс – таблице?
6) В каком случае задача линейного программирования не имеет решения?

3 Лабораторная работа №3. Нахождение опорного плана в транспортных задачах методом «северо-западного угла»

Цель работы: Приобретение навыков нахождения опорного плана в транспортных задачах линейного программирования методом «северо-западного угла» и составление программы решения задач.

3.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие транспортной задачи;

3) найти опорный план методом «северо-западного угла»;

4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

3.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) распечатку текста программы решения задачи;

7) распечатку результатов решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

3.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №3

3.3.1 Общий вид транспортной задачи

Одной из типичных задач линейного программирования является транспортная задача, которая возникает при планировании наиболее рациональных перевозок груза.

В общем виде транспортную задачу принято рассматривать в виде таблицы (таблица 26).

Таблица 26 – Общий вид транспортной задачи

Поставщики	Потребители				Запасы груза
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1m} x_{1m}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2m} x_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	…	c_{nm} x_{nm}	a_n
Потребности в грузе	b_1	b_2	…	b_m	

где A_i – поставщики груза (i=$\overline{1;n}$);

B_j – потребители груза (j=$\overline{1;m}$);

a_i – запасы груза (i=$\overline{1;n}$);

b_j – потребители в грузе (j=$\overline{1;m}$);

c_{ij} – стоимость (тариф) каждой перевозки (i=$\overline{1;n}$, j=$\overline{1;m}$);

x_{ij} – количество распределенного товара от i-го поставщика j-му потребителю(i=$\overline{1;n}$, j=$\overline{1;m}$).

Если в транспортной задаче выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, то транспортная задача называется **закрытой**, иначе - **открытой**.

Для написания модели необходимо все ограничения и целевую функцию представить в виде математических уравнений:

1. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i$ (i=$\overline{1;n}$);

2. $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (j=$\overline{1;m}$);

3. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

4. $x_{ij} \geq 0$ $(i=\overline{1;n}; j=\overline{1;m})$;

5. $$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}.$$

Методами отыскания начального плана (опорного решения) для решения транспортной задачи являются:

1) метод «северо-западного угла»;

2) метод минимального элемента;

3) метод Фогеля.

3.3.2 Метод «северо-западного угла»

Заполнение таблицы начинается с левого верхнего угла (северо-запаного), передвигаясь дальше по столбцу или по строке. В клетку (1;1) заносят меньшее из чисел a_1 или b_1 , т.е x_{11}=min(a_1; b_1).

Если $a_1>b_1$, то $x_{11}=b_1$. Следовательно, $x_{i1}=0$, i = 2,3...n., т.е. потребности первого потребителя удовлетворены полностью.

Двигаясь дальше по первой строке, записываем в соседнюю клетку

x_{12} = min(a_1-b_1; b_2).

Если $b_1>a_1$, то $x_{11}=a_1$. Следовательно, $x_{1j}=0$, j=2,3...n., т.е. запасы первого поставщика исчерпаны полностью.

Двигаясь дальше по первому столбцу, записываем в соседнюю клетку x_{21} = min(a_2 ; b_1-a_1) и т.д.

Таким образом, пересчитывая запасы и потребности, столбец с исчерпанным запасом или строку с удовлетворенной потребностью исключаем из дальнейшего расчета. Снова находим северо-западный угол, заполняем эту клетку, вычеркиваем строку или столбец и т.д пока не будут исчерпаны все запасы и не удовлетворены все потребности в грузе.

Пример: Пять песчано-гравийных карьеров добывают в сутки 60, 70, 120, 130, 100 у.е. гравия. Для строительства трех дорог необходимо гравий в количестве

140, 180, 160 у.е. соответственно. Стоимость перевозок из одного карьера на один объект приведена в таблице 2 в денежных единицах (д.е).

Построить опорный план перевозок по правилу «северо-западного угла» и определить значения целевой функции построенного плана.

Таблица 27 – Исходные данные задачи

Карьеры	Дорога 1	Дорога 2	Дорога 3	Запасы гравия
№ 1	2	8	9	60
№ 2	3	5	8	70
№ 3	4	1	4	120
№ 4	2	4	7	130
№ 5	4	1	2	100
Потребности в гравии	140	180	160	

Решение задачи рассмотрим в таблице 28.

Таблица 28 - Опорное решение методом «северо-западного угла»

Карьеры	Дорога 1	Дорога 2	Дорога 3	Запасы гравия
№ 1	2 60	8 0	9 0	60
№ 2	3 70	5 0	8 0	70
№ 3	4 10	1 110	4 0	120
№ 4	2 0	4 70	7 60	130
№ 5	4 0	1 0	2 100	100
Потребности в гравии	140	180	160	480

X_{11} = min(60; 140)=60;

X_{21} = min(70; 140-60)=70;

X_{31} = min(120; 10)=10;

X_{32} = min(120-10; 180)=60;

X_{42} = min(130; 180-110)=70;

X_{43} = min(130-70; 160)=60;

X_{53} = min(100; 160-60)=100.

Таким образом, опорный план равен:

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 \\ 10 & 110 & 0 \\ 0 & 70 & 60 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Найдем сумму затрат на перевозки:

Z = 60*2+70*3+10*4+110*1+70*4+60*7+100*2=1380 д.е.

Теорема: Число положительных компонент в опорном плане N≤n+m-1, где n – число строк, m – число столбцов плана.

Если условие N≤n+m-1 выполняется, то план называется **невырожденным**, иначе **вырожденным.**

3.4 Задания для лабораторной работы 3

Построить опорные планы перевозок по правилу «северо-западного угла, согласно номера своего варианта. Определить значения целевых функций построенных планов. Составить программы решения задач в среде программирования Delphi.

Таблица 29 – Исходные данные варианта 1

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***4***	***8***	***1***	***5***	100
A2	***6***	***3***	***2***	***9***	45
A3	***2***	***9***	***1***	***4***	55
Потребность в грузе B_j	50	50	25	75	

Таблица 30 – Исходные данные варианта 2

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***4***	***7***	***2***	***3***	30
A2	***3***	***1***	***0***	***4***	190
A3	***5***	***6***	***3***	***7***	250
Потребность в грузе B_j	70	120	150	130	

Вариант № 3

В пунктах А и В находятся соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта А в пункты 1, 2, 3 равна 60, 10, 40 тыс. р. за 1 т. соответственно, а из пункта В в пункты 1, 2, 3 — 120, 20, 80 тыс. р. за 1 т. соответственно. Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

Таблица 31 – Исходные данные варианта 4

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***5***	***1***	***2***	***3***	300
A2	***6***	***3***	***7***	***1***	200
A3	***4***	***5***	***3***	***2***	500
A4	***2***	***4***	***6***	***4***	700
Потребность в грузе B_j	230	420	650	400	

Таблица 32 – Исходные данные варианта 5

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***4***	***1***	***8***	***3***	50
A2	***5***	***7***	***0***	***9***	190
A3	***7***	***1***	***3***	***2***	110
Потребность в грузе B_j	70	30	150	100	

Таблица 33 – Исходные данные варианта 6

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***1***	***1***	***2***	***3***	155
A2	***4***	***3***	***9***	***1***	145
A3	***4***	***5***	***7***	***2***	560
A4	***2***	***0***	***6***	***4***	140
Потребность в грузе B_j	400	420	130	50	

Таблица 34 – Исходные данные варианта 7

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***5***	***1***	***2***	***3***	30
A2	***6***	***3***	***7***	***1***	20
A3	***4***	***5***	***3***	***2***	500
A4	***2***	***4***	***6***	***4***	130
Потребность в грузе B_j	40	42	188	410	

Вариант № 8

Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30 платформ, третий – 40 платформ. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому – 70 шт., второму – 30, третьему – 20, четвертому – 40 шт.

Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в таблице 35.

Таблица 35 – Стоимость перевозки

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей.

Вариант № 9

Груз, хранящийся на трех складах и требующий для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину требуется 44 машины груза, второму — 70, третьему — 50 и четвертому

— 82 машины. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 д. е. Расстояния от складов до магазинов указаны в таблице 36.

Таблица 36 – Расстояния от складов до магазинов

Склады	Магазины			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов.

Вариант № 10

На складах A, B, C находится сортовое зерно 100, 150, 250 т, которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т, пункту 2 - 100, пункту 3 - 200, пункту 4 - 150 т сортового зерна. Стоимость доставки 1 т зерна со склада A в указанные пункты соответственно равна (д. е.) 80, 30, 50, 20; со склада B - 40, 10, 60, 70; со склада C - 10, 90, 40, 30.

Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки.

Таблица 37 – Исходные данные варианта 11

Поставщики	Потребители						Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	5	3	1	4	2	6	1780
A2	4	2	3	6	1	3	2000
A3	1	3	7	4	5	2	1530
A4	3	4	6	7	1	5	2860
Потребность в грузе B_j	850	1870	1950	1670	1000	830	

Таблица 38 – Исходные данные варианта 12

Поставщики	Потребители						Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	7	1	4	6	5	8	600
A2	1	3	5	2	4	6	800
A3	4	5	6	3	1	7	550
A4	5	3	7	2	8	4	730
A5	2	4	3	5	6	3	900
Потребность в грузе B_j	750	580	440	620	550	640	

Таблица 39 – Исходные данные варианта 13

Поставщики	Потребители					Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	4	1	2	5	6	100
A2	7	3	4	2	5	70
A3	6	4	7	1	8	130
A4	2	5	6	4	7	150
Потребность в грузе B_j	80	120	70	130	50	

Таблица 40 – Исходные данные варианта 14

Поставщики	Потребители							Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	
A1	5	1	4	3	6	7	2	1040
A2	4	2	6	5	1	8	3	2700
A3	7	3	1	4	2	5	6	1885
A4	2	5	7	1	4	3	4	1457
Потребность в грузе B_j	590	740	875	1537	1200	1500	640	

Таблица 41 – Исходные данные варианта 15

Поставщики	Потребители							Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	
A1	8	1	9	3	6	7	2	70
A2	1	2	2	4	1	8	3	50
A3	5	3	1	3	2	5	8	150
A4	2	5	7	1	6	3	4	330
Потребность в грузе B_j	20	40	75	25	200	140	100	

3.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №3

1) Какие задачи линейного программирования называются транспортными?
2) Каковы особенности математической модели транспортной задачи?
3) Какие транспортные задачи называются закрытыми?
4) Какие транспортные задачи называются открытыми?
5) Какие условия должны выполняться в транспортных задачах?
6) Укажите методы нахождения опорного решения.
7) Какой план в транспортных задачах называется вырожденным?
8) Алгоритм нахождения опорного плана методом «северо-западного угла».

4 Лабораторная работа №4. Нахождение опорного плана в транспортных задачах методом минимального элемента

Цель работы: Приобретение навыков нахождения опорного плана в транспортных задачах линейного программирования методом минимального элемента и составление программы решения задач.

4.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие транспортной задачи из лабораторной работы №3;

3) найти опорный план методом минимального элемента;

4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

5) оформить отчет по лабораторной работе;

6) защитить лабораторную работу.

4.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;
2) цель работы;
3) формулировку задания;
4) аналитическое решение задачи своего варианта;
5) распечатку текста программы решения задачи;
6) распечатку результатов решения задачи;
7) вывод о проделанной работе.

4.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №4

4.3.3 Метод минимального элемента

Метод минимального элемента состоит из следующих шагов:

1) В клетку с минимальной единичной стоимостью записывают наибольшее возможное количество груза для поставки.

2) Производится корректировка оставшихся запасов и потребностей.

3) Выбирается следующая клетка с наименьшим тарифом, в которую планируется наибольшее возможное количество груза для поставки и т.д. до тех пор, пока оставшиеся запасы и потребности не станут равны нулю.

4) Если наименьший тариф соответствует более чем одной клетке, то выбор осуществляется случайным образом.

Рассмотрим решение примера из лабораторной работы 3 методом минимального элемента, используя таблицу 42.

Таблица 42 - Опорное решение методом минимального элемента

Карьеры	Дорога 1	Дорога 2	Дорога 3	Запасы гравия
№ 1	2 60	8 0	9 0	60
№ 2	3 0	5 0	8 70	70
№ 3	4 0	1 80	4 40	120
№ 4	2 80	4 0	7 50	130
№ 5	4 0	1 100	2 0	100
Потребности в гравии	140	180	160	480

C_{52} = 1- min, X_{52}= min (100; 180)=100.

C_{32}=1- min, X_{32}= min (120; 180-100)=80.

C_{11}=2 – min, X_{11}= min (60;140)=60.

C_{41}=2 – min, X_{11}=min(130;140-60)=80.

C_{33}=4 - min, X_{33}=min(120-180;160)=40.

C_{43}=7 - min, X_{43}=min(130-80;160-40)=50

C_{23}=8 – min, X_{23}=min(70;160-90)=70

Таким образом, опорный план равен:

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \\ 0 & 80 & 40 \\ 80 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

Затраты на перевозки равны:

Z = 60*2+70*8+80*1+40*4+80*2+50*7+100*1=1530 д.е.

4.4 Задания для лабораторной работы №4

Построить опорный план перевозок задачи своего варианта из лабораторной работы №3 методом минимального элемента. Определить значения целевой функции построенного плана. Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi.

4.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №4

1) Какие задачи линейного программирования называются транспортными?
2) Каковы особенности математической модели транспортной задачи?
3) Какие транспортные задачи называются закрытыми?
4) Какие транспортные задачи называются открытыми?
5) Какие условия должны выполняться в транспортных задачах?
6) Укажите методы нахождения опорного решения.
7) Какой план в транспортных задачах называется вырожденным?
8) Алгоритм нахождения опорного плана методом минимально элемента.

5 Лабораторная работа №5. Нахождение опорного плана в транспортных задачах методом Фогеля

Цель работы: Приобретение навыков нахождения опорного плана в транспортных задачах линейного программирования методом Фогеля и составление программы решения задач.

5.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие транспортной задачи из лабораторной работы №3;

3) найти опорный план методом Фогеля;

4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

5) распечатать текст и результаты программы в отчет;

6) оформить отчет по лабораторной работе;

7) защитить лабораторную работу.

5.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) распечатку текста программы решения задачи;

7) распечатку результатов решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

5.3 Теоретическая справка к лабораторной работе №5

5.3.1 Метод Фогеля

По каждой строке и каждому столбцу определяем разность между двумя наименьшими тарифами, записываем ее. Из этих разностей выбираем наибольшую, выделяем ее. В строке или столбце, где имеется наибольшая разность, заносим в клетку с минимальным тарифом максимально допустимую доставку. После этого записываем остаток груза по строкам и столбцам. В строках и столбцах с нулевым остатком проставляются нули во все незанятые клетки. Занятые клетки на следующих этапах не рассматриваются.

Рассмотрим условие задачи примера из лабораторной работы 3.

Построим опорный план перевозок, используя метод Фогеля и определим, значения целевой функции построенного плана.

Решение задачи рассмотрим в таблице 43.

Таблица 43 - Опорное решение методом Фогеля

Карьеры	Дорога 1	Дорога 2	Дорога 3	Запасы гравия
№ 1	60 [2]	0 [8]	0 [9]	60
№ 2	70 [3]	0 [5]	0 [8]	70
№ 3	0 [4]	120 [1]	0 [4]	120
№ 4	10 [2]	60 [4]	60 [7]	130
№ 5	0 [4]	0 [1]	100 [2]	100
Потребности в гравии	140	180	160	480

C_{12}-C_{11}=6 – max, C_{11}=2 - min

X_{11}=min(60;140)=60.

C_{31}-C_{32}=3 – max, C_{32}=1 - min

X_{32}=min(120;180)=120.

C_{43}-C_{53}=5 – max, C_{53}=2 - min

X_{53}=min(100;160)=100.

C_{22}-C_{21}=2 – max, C_{21}=3-min

X_{21}=min(70;140-60)=70.

C_{41} =2 –min

X_{41}=min(130;140-130)=10.

C_{42} =4 –min

X_{42}=min(130-10;180-120)=60.

X_{43}=min(130-70;160-100)=60.

Таким образом, опорный план равен:

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 \\ 10 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Найдем сумму затрат на перевозки:

Z = 60*2+70*3+10*2+120*1+60*4+60*7+100*2=1330 д.е.

5.4 Задания для лабораторной работы №5

Построить опорный план перевозок задачи своего варианта из лабораторной работы №3 методом Фогеля. Определить значения целевой функции построенного плана. Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi.

5.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы №5

1) Какие задачи линейного программирования называются транспортными?
2) Каковы особенности математической модели транспортной задачи?
3) Какие транспортные задачи называются закрытыми?
4) Какие транспортные задачи называются открытыми?
5) Какие условия должны выполняться в транспортных задачах?
6) Укажите методы нахождения опорного решения.
7) Какой план в транспортных задачах называется вырожденным?
8) Алгоритм нахождения опорного плана методом Фогеля.

Список использованных источников

1 **Бережная Е.В.** Математические методы моделирования экономических систем/ Е.В Бережная, В.И. Бережной. –М.: Финансы и статистика, 2002. –368 с.

2 **Агальцов В.П.** Математические методы в программировании/ В.П. Агальцов., И.В. Волдайская. –М.: Форум - Инфра-М, 2006. -224 с.

3 **Кузнецов А.В.** Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование/ А.В. Кузнецов, Р.А. Рутковский –Мн.: Вышэйшая школа, 2002. -447 с.

4 **Партыка Т.Л.** Математические методы / Т.Л. Партыка, И.И. Попов. –М.: Форум - Инфра-М, 2005. -464 с.

5 **Акулич И.Л.** Математическое программирование в примерах и задача / И.Л. Акулич. –М.: Высшая школа, 1993. –336 с.

6. **Пинегина М.В.** Математические методы и модели в экономике/ М.В. Пинегина. –М.: Экзамен, 2004. –212 с.